

La retta

La retta è un insieme infinito di punti allineati nel piano e nello spazio. Nel piano cartesiano è definita da un'equazione di primo grado in x e y (variabile indipendente la prima e dipendente la seconda). L'equazione della retta, nel piano, si può trovare in tre forme: esplicita, implicita e segmentaria

Forma esplicita

$$y = mx + q$$

m = coefficiente angolare.

È il coefficiente dal quale dipende l'inclinazione della retta.

q = termine noto o ordinata all'origine

Forma implicita

$$ax + by + c = 0$$

In questo caso il coefficiente angolare è dato dalla formula:

$$m = -\frac{a}{b}$$

Mentre la q è data dalla formula: $m = -\frac{c}{b}$

Forma segmentaria (meno usata)

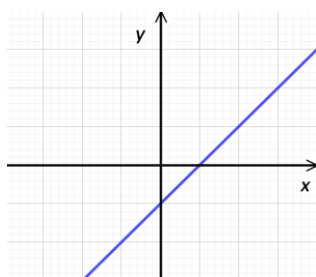
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Dove p rappresenta l'intersezione della retta con l'asse x e q con l'asse y

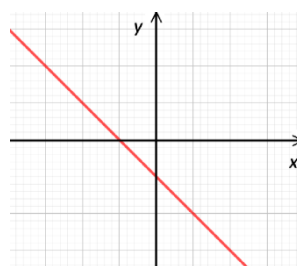
Alcune note

- Se una retta passa per l'origine, il termine noto è uguale a zero
- Se una retta è parallela all'asse y , nell'equazione "manca" la y , vale a dire che il coefficiente di quest'ultima è uguale a zero. La retta è quindi del tipo: $x = k$ o $ax + c = 0$
- Se una retta è parallela all'asse x , nell'equazione "manca" la x , vale a dire che il coefficiente di quest'ultima è uguale a zero. La retta è quindi del tipo: $y = k$ o $by + c = 0$
- Se il coefficiente angolare è positivo la retta va dal 1° al 3° quadrante, se è negativo va dal 2° al 4°

Se $m > 0$ La retta va dal 1° al 3° quadrante



Se $m < 0$ La retta va dal 2° al 4° quadrante

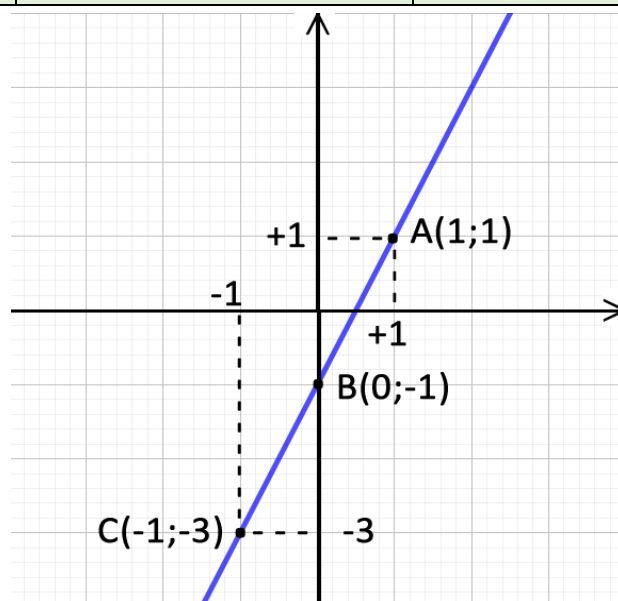


Rette particolari	
$x=0$	Asse y
$y=0$	Asse x
$y=x$	Bisettrice del 1° e 3° quadrante
$y=-x$	Bisettrice del 2° e 4° Quadrante
$ax + by = 0$	Retta passante per l'origine in forma implicita
$y=mx$	Retta passante per l'origine in forma esplicita
$x=k$ (con k costante)	Retta parallela all'asse y in forma esplicita
$ax + c = 0$	Retta parallela all'asse y in forma implicita
$y=k$ (con k costante)	Retta parallela all'asse x in forma esplicita
$by + c = 0$	Retta parallela all'asse x in forma implicita

Grafico di una retta

Per tracciare il grafico di una retta basta determinare almeno due dei suoi punti. Per ottenere questi punti si danno dei valori a piacere alla x (variabile indipendente) e si sostituiscono nell'equazione della retta (ovviamente al posto della x), ottenendo così i corrispondenti valori di y e quindi punti della retta. Più punti si trovano...meglio è! (Il grafico sarà sicuramente più preciso)

x	$y=2x-1$	Punti trovati
0	$y=2 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$	(0; -1)
1	$y=2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$	(1; 1)
-1	$y=2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$	(-1; -3)



Intersezione tra due rette

Per trovare il punto di intersezione tra due rette occorre mettere a sistema le loro equazioni.

I valori di x e y che si trovano risolvendo il sistema, sono le coordinate del punto di intersezione

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Soluzione $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$

$P(x_1; y_1)$ Punto di intersezione

Esempio

Determinare il punto di intersezione tra le rette di equazione:

$$x+3y=0 \text{ e } 2x+y-5=0$$

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y \\ 2(-3y) + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y \\ -6y + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y \\ -5y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y \\ y = \frac{5}{-5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3(-1) \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = +3 \\ y = -1 \end{cases}$$

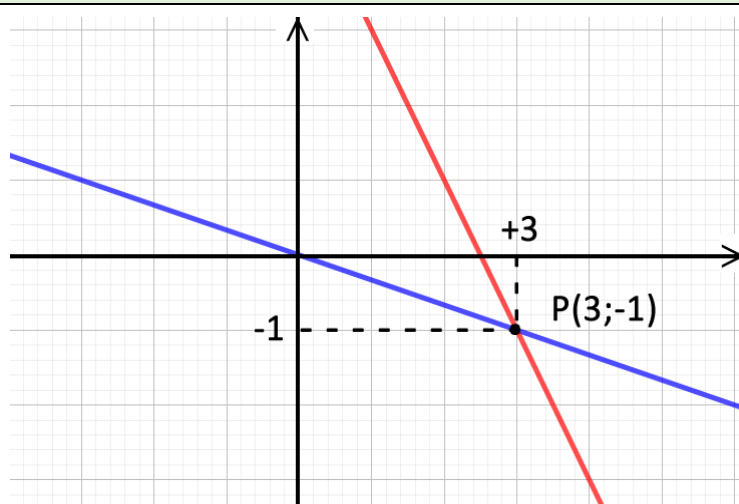
$P(3; -1)$ Punto di intersezione

Intersezione tra due rette: Metodo grafico

Il punto di intersezione tra due rette si può anche trovare con il metodo grafico.

Tracciando accuratamente le due rette, le coordinate del punto sono facilmente leggibili dal grafico.

Considerando l'esempio precedente, come si vede, si giunge allo stesso risultato



N.B. Il metodo grafico è meno efficace e di più difficile applicazione con coefficienti numerici frazionari, contenenti radici o numeri molto grandi. In quel caso è preferibile determinare algebricamente i punti di intersezione

Distanza di un punto da una retta

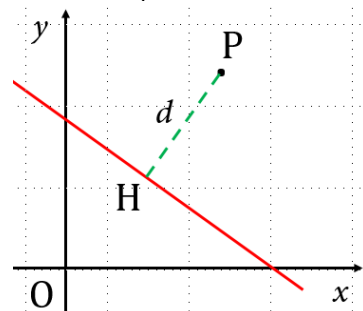
Un'altra formula molto utile è la distanza di un punto da una retta. Detto P un punto generico del piano, tale distanza si può definire come la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto P e il piede della perpendicolare alla retta, condotta dallo stesso punto P. Tra le applicazioni è molto importante quella per determinare la lunghezza dell'altezza di un triangolo. Nel grafico a fianco, il piede della perpendicolare è stato indicato con H

Se la retta è in forma esplicita

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Se la retta è in forma esplicita

$$d = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1 + m^2}}$$



Esempio

Calcolare la distanza del punto P(2;-3) dalla retta di equazione $3x+4y+1=0$.

Soluzione. Per trovare la distanza, basta sostituire le coordinate del punto al posto di x_0 e di y_0 presenti nella formula e al posto di a, b e c i coefficienti dell'equazione della retta. Svolti i calcoli, si toglie il valore assoluto, scrivendo il risultato positivo anche se all'interno dovesse risultare negativo come nell'esempio a lato (una distanza non può essere negativa)

$$P(2;-3) \quad 3x+4y+1=0$$

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|3(2) + 4(-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d = \frac{|6 - 12 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

Condizione di appartenenza di un punto ad una retta

Si dice che un punto appartiene ad una retta (o che la retta passa per quel punto) se, sostituendo le coordinate del punto al posto di x e y nell'equazione della retta, si ottiene un'uguaglianza come nell'esempio a fianco

$$P(4; -1) \quad y = 2x - 9$$

Sostituendo si ottiene

$$-1 = 2(4) - 9$$

$$-1 = 8 - 9 \rightarrow -1 = -1$$

Finora sono state prese in esame le regole principali sulla retta. Tutte queste regole presupponevano la conoscenza dell'equazione della retta. Nel prossimo capitolo saranno affrontati quei problemi in cui l'equazione della retta è da determinare

Come si determina l'equazione della retta	
Equazione del fascio proprio	
Per determinare l'equazione della retta, occorrono due dati. Salvo casi particolari, uno di questi due dati che il testo del problema assegna è un punto per il quale la retta passa. Per questo, si parte dall'equazione a lato denominata "Equazione del fascio di rette passanti per un punto". In questa formula si sostituiscono le coordinate del punto assegnato, al posto di x_0 e y_0. Il secondo dato riguarda evidentemente la m. Per determinare la m il testo può fornire una retta a cui la retta richiesta deve essere parallela o perpendicolare oppure può assegnare due punti per i quali deve passare. Per sfruttare questi ultimi dati, si vedano i prossimi specchietti	Equazione del fascio proprio $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$
Come determinare il coefficiente angolare	
Per determinare la m ci sono tre possibilità	
Condizione di parallelismo. Due rette sono parallele se hanno il coefficiente angolare uguale	$m_1 = m_2$
Condizione di perpendicolarità. Due rette sono perpendicolari se il coefficiente angolare di una è l'antireciproco del coefficiente angolare dell'altra	$m_1 = -\frac{1}{m_2}$
Coefficiente angolare di una retta passante per due punti.	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Esempio 1	
Determinare l'equazione della retta passante per A(1;-3) e parallela alla retta r di equazione $y=2x-3$ La "m" della retta r è 2, quindi, per la condizione di parallelismo, anche il coefficiente angolare della retta richiesta deve essere 2	Per risolvere il problema, si sostituiscono le coordinate del punto nell'equazione del fascio $y + 3 = m \cdot (x - 1)$ Poi si sostituisce 2 alla m e si svolgono i calcoli $y + 3 = 2 \cdot (x - 1)$ $y + 3 = 2x - 2$ $y = 2x - 2 - 3$ $y = 2x - 5$ Retta richiesta

Esempio 2

Determinare l'equazione della retta passante per A(0;4) e **perpendicolare** alla retta r di equazione $4x-2y+5=0$

In questo caso la retta è in forma implicita, perciò per capire quanto vale la m della retta r (retta "d'appoggio"), si deve applicare la formula seguente:

$$m_r = -\frac{a}{b}$$

$$m_r = -\frac{4}{-2} = +2$$

Quindi la m della retta richiesta sarà

$$m = -\frac{1}{2}$$

Antireciproco di m_r (condizione di perpendicolarità)

Innanzitutto, si devono sostituire le coordinate del punto nell'equazione del fascio

$$y - 4 = m \cdot (x - 0)$$

Ora si sostituisce alla m , l'antireciproco della m trovata qui a fianco, cioè

$$m = -\frac{1}{2}$$

Svolgendo i calcoli, si arriva alla retta richiesta

$$y - 4 = -\frac{1}{2} \cdot (x)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}x$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Retta richiesta

Esempio 3

Determinare l'equazione della retta passante per A(-2;3) e B(1;-3)

Per trovare la m si applica la formula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-3 - 3}{1 + 2} = -\frac{6}{3} = -2$$

Si sostituiscono le coordinate di uno dei due punti (è indifferente quale) nell'equazione del fascio

$$y - 3 = m \cdot (x + 2)$$

E al posto di m il valore trovato qui a fianco.

$$y - 3 = -2 \cdot (x + 2)$$

$$y - 3 = -2x - 4$$

$$y = -2x - 4 + 3$$

$$y = -2x - 1$$

Retta richiesta

Altro metodo per trovare l'equazione della retta passante per due punti

L'equazione di una retta passante per due punti si può trovare anche con la formula a fianco, senza l'utilizzo dell'equazione del fascio (anche se in realtà questa formula deriva proprio dall'equazione del fascio).

Esempio A(-1;0) e B(1;2)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x + 1}{1 + 1}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x + 1}{2} \rightarrow y = x + 1$$

Retta richiesta

Casi particolari

A volte le rette “d’appoggio” sono rette particolari (assi cartesiani o rette parallele agli assi cartesiani). In questi casi è preferibile non utilizzare l’equazione del fascio proprio, così come non è conveniente quando il testo chiede di determinare l’equazione di una retta passante per due punti che hanno stessa ascissa o stessa ordinata. Nelle tabelle che seguono, sono riportati alcuni di questi casi

Caso 1: Retta passante per un punto e parallela all’asse y

Esempio.

Determinare l’equazione della retta passante per il punto $P(1; -4)$ e parallela all’asse y

Nota.

La differenza tra fascio proprio e fascio improprio, è che nel primo, tutte le rette hanno un punto in comune, detto “centro del fascio”, mentre nel secondo, tutte le rette sono parallele tra loro e quindi non hanno punti in comune

La prima considerazione da fare, che poi è quella che risolve la prima parte del problema, è che la retta richiesta è del tipo $x=k$, in quanto il testo chiede una retta parallela all’asse delle y . Quindi si parte proprio dall’equazione

$$x=k$$

denominata “Equazione del fascio improprio” (Fascio di rette parallele all’asse y) e non dall’equazione del fascio proprio

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Come si può intuire, una volta trovato k il problema sarà risolto. Per determinare questo valore, basta fare la condizione di appartenenza del punto P alla retta $x=k$.

Si devono quindi sostituire le coordinate del punto P in quest’ultima equazione (in realtà si deve sostituire solo 1 al posto della x , la y non compare)

$$\begin{array}{ccc} x = k & & \\ \swarrow & & \searrow \\ P(1; -4) & & 1 = k \end{array}$$

Per cui la retta richiesta è semplicemente la retta di equazione

$$x = 1$$

Nota. Se il testo chiede di determinare la retta **perpendicolare** all’asse y , non si parte più dall’equazione $x=k$, ma dall’equazione $y=k$ (fascio di rette parallelo all’asse x e quindi perpendicolare all’asse y). Il resto del procedimento è lo stesso

Caso 2: Retta passante per un punto e parallela all'asse x

Esempio.

Determinare l'equazione della retta passante per il punto $P(-2; +3)$ e parallela all'asse x

Stavolta però, si parte dall'equazione

$$y=k$$

anche questa denominata "Equazione del fascio improprio" (Fascio di rette parallele all'asse x)

Per determinare k , basta sostituire le coordinate del punto P in quest'ultima equazione (in realtà si deve sostituire solo 3 al posto della y , la x non compare)

$$\begin{array}{ccc}
 y = k & \xrightarrow{\quad} & 3 = k \\
 \nwarrow P(-2; +3) & &
 \end{array}$$

Per cui la retta richiesta è semplicemente la retta di equazione

$$y = 3$$

Nota 1. Se il testo chiede di determinare la retta **perpendicolare** all'asse x , non si parte più dall'equazione $y=k$, ma dall'equazione $x=k$ (fascio di rette parallelo all'asse y e quindi perpendicolare all'asse x). Il resto del procedimento è lo stesso

Nota importante

Si applicano gli stessi procedimenti se il testo, anziché una retta parallela o perpendicolare all'asse x o all'asse y , chiede di determinare l'equazione di una retta parallela o perpendicolare ad un'altra retta che, a sua volta, è parallela o perpendicolare all'asse x o all'asse y

Esempio.

Determinare l'equazione della retta parallela alla retta $2y+1=0$ e passante per il punto $P(1;2)$

La retta data è parallela all'asse x (è in forma

implicita e manca la x). La retta richiesta, a sua

volta, sarà parallela all'asse x e quindi sarà del tipo

$y = k$ Per determinare k , come prima, si

sostituisce 2 (ordinata di P) alla y e si determina così il valore di k

$$2 = k \rightarrow y = 2 \rightarrow \text{Retta richiesta}$$

Caso 3: Retta passante per due punti con stessa ascissa

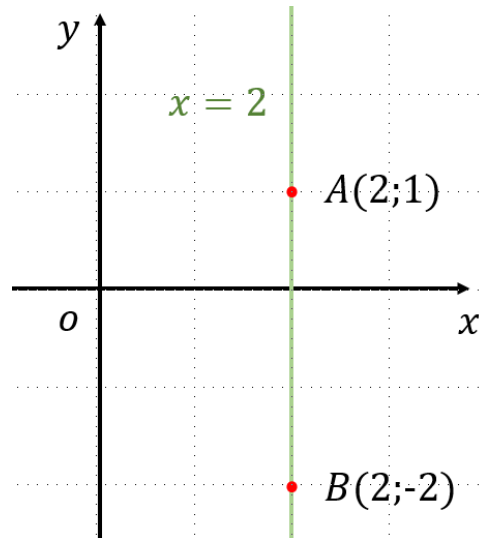
Rientrano nei casi particolari, anche quei casi in cui il testo chiede di determinare l'equazione di una retta passante per due punti aventi stessa ascissa o stessa ordinata. Per risolvere questo tipo di problemi, non occorre applicare la formula studiata in precedenza (retta passante per due punti). Basta fare alcune considerazioni, anche aiutandosi col grafico, che permettono di arrivare alla soluzione in maniera piuttosto rapida. Di sotto sono riportati due esempi che consentono di capire quanto anticipato

Esempio:

Determinare l'equazione della retta passante per i punti $A(2;1)$ e $B(2;-2)$

L'equazione della retta richiesta, come si vede qui a fianco, ha quindi un'equazione del tipo:

$$x = \text{ascissa comune}$$



Come si vede dal grafico, se due punti di una retta hanno uguale ascissa, allora tutti i punti della retta hanno quella stessa ascissa. La retta in questione è parallela all'asse y . La sua equazione è quindi la seguente:

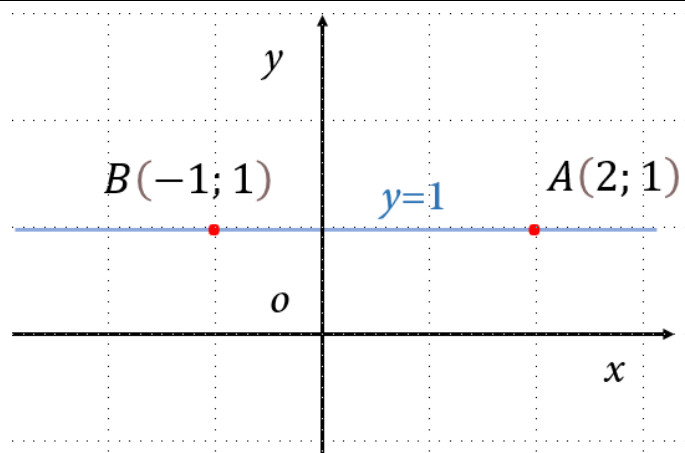
$$x = 2$$

Si procede in modo analogo quando si deve determinare l'equazione di una retta passante per due punti con stessa ordinata. L'equazione sarà del tipo:

$$y = \text{ordinata comune}$$

Esempio:

Determinare l'equazione della retta passante per i punti $A(2;1)$ e $B(-1;1)$



In questo caso, tutti i punti hanno stessa ordinata. La retta richiesta ha quindi la seguente equazione:

$$y = 1$$

Riepilogo sui fasci di rette	
Fascio proprio	$y - y_0 = m(x - x_0)$ Le rette di questo fascio hanno tutte un punto in comune (non sono parallele) Il punto $P(x_0; y_0)$ si chiama CENTRO DEL FASCIO In generale, un fascio è proprio, quando il coefficiente angolare non è costante
Fasci impropri	$x = k$ $y = k$ Le rette di questo fascio sono parallele e non hanno punti in comune. Più precisamente: sono rette parallele agli assi cartesiani. Le prime sono parallele all'asse y e le seconde all'asse x. Esistono fasci impropri di rette parallele tra loro ma non parallele agli assi cartesiani. Per esempio le rette dell'equazione: $y = kx + q$ Con k costante e q variabile. Sono rette parallele tra loro ma non agli assi. In generale, un fascio è improprio quando il coefficiente angolare è costante.