Capitolo X

NUMERI IMMAGINARI. NUMERI COMPLESSI

229. Abbiamo precedentemente esposto le ragioni per cui si è stati indotti ad allargare il campo dei numeri razionali con l'introduzione dei numeri irrazionali. Ma anche in tal modo resta ancora esclusa la possibilità di eseguire certe operazioni, come ad esempio quella dell'estrazione di radice di indice pari da un numero negativo: abbiamo visto infatti che simboli del tipo

$$\sqrt{-25} \quad , \quad \sqrt{-b^2}$$

non hanno alcun significato nel campo reale. Si rende pertanto necessaria una nuova estensione del concetto di numero, il che si fa introducendo i **numeri immaginari e i numeri complessi.**

Sarà opportuno notare subito che il concetto che presiede all'introduzione di questi nuovi numeri è quello di conservare anche per essi le proprietà formali delle operazioni fondamentali, allo scopo di poter adoperare, senza alcuna variazione, i procedimenti del calcolo algebrico ordinario.

230. Cominciamo dall'osservare che non vi è alcun numero reale il cui quadrato sia eguale a -1; però nulla impedisce di creare un nuovo numero, fuori del campo reale, il quale soddisfaccia a questa condizione. Questo nuovo numero si suol indicare con la lettera i e si chiama *unità immaginaria.* Si ha dunque per definizione

$$i^2 = -1 .$$

Volendo conservare ai nuovi numeri la regola dei segni, si avrà pure

$$(-i)^2 = -1 ,$$

il che equivale a scrivere $(\pm i)^2 = -1 \Rightarrow \pm i = \sqrt{-1}$

$$\sqrt{-1} = \pm i .$$

Si pone poi, come per i numeri reali,

$$i \cdot 1 = i \quad , \quad i \cdot 0 = 0 .$$

Se b è un numero reale il prodotto $b\,i$ si chiama *numero immaginario.* Si conserva per questi prodotti la proprietà commutativa, ponendo

$$b\,i = i\,b ;$$

$* \; i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

in particolare si ha

$$1 \cdot i = i \cdot 1 = i$$
$$0 \cdot i = i \cdot 0 = 0.$$

Si fanno ancora la convenzione che se b e b' sono due numeri reali, si abbia

$$b\,i = b'\,i$$

soltanto se $b = b'$.

Infine, volendo conservare le consuete regole di calcolo, si pone

$$i\,b + i\,b' = i\,(b + b') \qquad i\,b - i\,b' = i\,(b - b')$$

$$i\,b \cdot c = c \cdot i\,b = i\,(b\,c) \qquad i\,b : c = i \cdot \frac{b}{c}.$$

I numeri $b\,i$ e $-b\,i$ si dicono *numeri immaginari opposti o contrari.*

Convenendo che per le potenze ad esponente intero valgano le consuete definizioni e le proprietà, per le successive potenze di i si ha:

$$i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad * \, i^3 = -i, \qquad i^4 = 1,$$
$$i^5 = i, \qquad i^6 = -1, \qquad i^7 = -i, \qquad i^8 = 1, \qquad \text{ecc.},$$

cioè *le prime quattro potenze di* i *sono ordinatamente*: i, — 1, — i, 1 *e le successive si riproducono indefinitamente nello stesso ordine.*

231. Dalle definizioni date risulta che *l'addizione e la sottrazione di numeri immaginari dà come risultato un numero immaginario.*

Esempi:

$$5\,i + 7\,i = 12\,i; \qquad -4\,i + 7\,i = 3\,i; \qquad 12\,i - 9\,i = 3\,i.$$

Invece *il prodotto e il quoziente di due numeri immaginari sono numeri reali.*

Esempi:

$$2\,i \cdot 4\,i = 8\,i^2 = -8; \qquad a\,i \cdot b\,i = a\,b\,i^2 = -a\,b;$$

$$8\,i : 3\,i = \frac{8}{3}; \qquad a\,i : b\,i = \frac{a}{b}.$$

In particolare *il quadrato di un numero immaginario è un numero reale negativo.*

Esempi:

$$(7\,i)^2 = 49\,i^2 = -49; \qquad (a\,i)^2 = a^2\,i^2 = -a^2. \qquad \sqrt{(a\,i)^2} = \sqrt{-a^2}$$

Dall'ultima eguaglianza si ha

$$\sqrt{-a^2} = \pm\,a\,i,$$

cioè *mediante l'uso dei numeri immaginari si può sempre estrarre la radice quadrata da un numero negativo; essa ha due valori opposti.*

Esempi:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(-1) \cdot 25} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} = \pm i\, 5 = \pm 5\, i\,;$$

$$\sqrt{-7} = \pm i \sqrt{7}\,.$$

232. *Siano ora* a *e* b *due numeri reali. Si conviene di dare un significato alle espressioni della forma*

$$a + i\, b\,,$$

somma di un numero reale e di un numero immaginario, che si dicono **numeri complessi.**

Il numero a *si dice* **parte reale** *del numero complesso e* b **coefficiente dell'immaginario.**

Se b = 0 *il numero diventa reale; se* a = 0 *il numero complesso diventa immaginario.*

233. *Due numeri complessi si dicono* **eguali** *quando hanno rispettivamente uguali le parti reali e i coefficienti degli immaginari.*

Quindi dicendo che

$$a + i\, b = c + i\, d\,,$$

si intende che sia

$$a = c \qquad \text{e} \qquad b = d\,.$$

Se ciò non si verifica i numeri si dicono *diseguali*, ma *non* si può stabilire tra loro i concetti di *maggiore* e *minore*.

Siccome abbiamo posto $i \cdot 0 = 0$, così dall'eguaglianza

$$a + i\, b = 0 = 0 + i \cdot 0$$

si trae, per la definizione precedente,

$$a = 0 \qquad \text{e} \qquad b = 0\,;$$

cioè *un numero complesso è eguale a zero allora e allora soltanto che sono eguali a zero la parte reale e il coefficiente dell'immaginario.*

234. *Due numeri complessi che hanno la stessa parte reale ed opposti i coefficienti dell'immaginario si dicono* **complessi coniugati.**

Per *esempio*, sono complessi coniugati i numeri delle seguenti coppie:

$5 + 3\,i$ e $5 - 3\,i$; $\quad -4 + 7\,i$ e $-4 - 7\,i$; $\quad a + b\,i$ e $a - b\,i$.

235. **La somma** *di due o più numeri complessi si definisce come il numero complesso che ha per parte reale la somma delle parti reali degli addendi e per coefficiente della parte immaginaria la somma dei coefficienti delle parti immaginarie.*

Così, per *esempio*:

$$(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\,i\,;$$
$$(3 + 4\,i) + (7 - 5\,i) = 10 - i\,;$$
$$(5 + 2\,i) + (-2 + 4\,i) + (4 - 8\,i) = 7 - 2\,i\,.$$

In particolare si ha

$$(a + b\,i) + (a - b\,i) = 2\,a\,,$$

cioè: *la somma di due numeri complessi coniugati è un numero reale.*

236. *Due numeri complessi si dicono* **opposti** *quando sono opposte tanto la parte reale che quella immaginaria.*

Per *esempio*, sono opposti i numeri complessi

$$a + b\,i \quad \text{e} \quad -a - b\,i\,; \qquad 3 - 4\,i \quad \text{e} \quad -3 + 4\,i\,.$$

Questa definizione è giustificata dal fatto che, come nel campo reale, la somma di due numeri complessi opposti è eguale a zero.

Si ha infatti

$$(a + b\,i) + (-a - b\,i) = (a - a) + (b - b)\,i = 0 + 0 \cdot i = 0\,.$$

237. *Per* **differenza** *di due numeri complessi si intende la somma del primo e dell'opposto del secondo.*

Così:

$$(a + b\,i) - (c + d\,i) = (a + b\,i) + (-c - d\,i) = (a - c) + (b - d)\,i\,;$$
$$(7 + 4\,i) - (2 + 15\,i) = 5 - 11\,i\,.$$

In particolare

$$(a + b\,i) - (a - b\,i) = 2\,b\,i\,,$$

cioè: *la differenza di due numeri complessi coniugati è un numero immaginario.*

238. Volendo conservare le ordinarie regole di calcolo per la moltiplicazione di due binomi, si è tratti *a definire il prodotto di due numeri complessi mediante l'eguaglianza*

$$(a + b\,i)\,(c + d\,i) = (a\,c - b\,d) + (b\,c + a\,d)\,i\,.$$

Si ottiene infatti il secondo membro di questa eguaglianza effettuando il prodotto indicato e tenendo presente che per definizione è $i^2 = -1$.

In particolare

$$(a + b\,i)\,(a - b\,i) = a^2 + b^2$$

cioè *il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è un numero reale e positivo, ed è eguale alla somma del quadrato della parte reale col quadrato del coefficiente dell'immaginario.*

Se si legge l'ultima relazione scritta in senso inverso si vede *che la somma di due quadrati è sempre decomponibile nel prodotto di due numeri complessi coniugati.*

Esempio:

$$81 + 25 = (9 + 5\,i)\,(9 - 5\,i)\,; \qquad 81 + 25 = (5 + 9\,i)\,(5 - 9\,i).$$

239. *Si chiama* **reciproco** *del numero complesso* c + di, *diverso da zero, il numero*

$$\frac{1}{c + d\,i} = \frac{c - d\,i}{c^2 + d^2} \quad (*)$$

Questa definizione è giustificata dal fatto che il prodotto di due numeri reciproci è eguale ad 1, come nel caso dei numeri reali.

Si ha infatti

$$(c + d\,i) \cdot \frac{c - d\,i}{c^2 + d^2} = \frac{c^2 + d^2}{c^2 + d^2} = 1\,.$$

240. *Per* **quoziente** *di due numeri complessi si intende il prodotto del primo per il reciproco del secondo.*

Così:

$$\frac{a + b\,i}{c + d\,i} = (a + b\,i) \cdot \frac{1}{c + d\,i} = (a + b\,i)\,\frac{c - d\,i}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{(a\,c + b\,d) + (b\,c - a\,d)\,i}{c^2 + d^2} = \frac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2} + \frac{b\,c - a\,d}{c^2 + d^2}\,i\,.$$

241. Mercè le definizioni date, si conservano alle operazioni coi numeri complessi tutte le consuete proprietà formali.

Ciò ci autorizza a seguire nel calcolo algebrico dei numeri complessi gli stessi procedimenti che si seguono operando con numeri reali, con la sola avvertenza di sostituire -1 al posto di i^2.

Così per **l'elevamento a potenza** si applicano le regole consuete, tenendo presente ciò che già abbiamo notato:

$$i^2 = -1\,; \qquad i^3 = -i\,; \qquad i^4 = 1\,, \text{ ecc.}$$

Per *esempio*:

$(5 + 2\,i)^2 = 25 - 4 + 20\,i = 21 + 20\,i\,.$

$(2 - 3\,i)^2 = 4 - 9 - 12\,i = -5 - 12\,i\,.$

$(3 + 2\,i)^3 = 27 + 54\,i - 36 - 8\,i = -9 + 46\,i\,.$

$(1 - i\sqrt{3})^3 = 1 - 3\,i\sqrt{3} + 9\,i^2 - 3\sqrt{3}\,i^3 = 1 - 3\sqrt{3}\,i - 9 + 3\sqrt{3}\,i = -8\,.$

(*) $\dfrac{c - d\,i}{c^2 + d^2}$ *si deduce da* $\dfrac{1}{c + d\,i}$ *moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato di* $c + d\,i$, *cioè per* $c - d\,i$.