

La programmazione lineare con "Derive"

prof. Guida

PROBLEMI DI SCELTA dipendenti da due variabili d'azione

.....in un problema di programmazione lineare, si ricorda che la funzione obiettivo $z=f(x,y)=ax+by+c$ assume il suo valore massimo (o minimo) soltanto o su un vertice o su tutti i punti di un lato del poligono convesso che rappresenta il campo di scelta.

ESERCIZIO 1 (utilizzo del metodo grafico)

Esempio astratto

Minimizzare la funzione $z=12x+4y$ tenendo conto dei vincoli:

$$\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ y \leq 4 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$$

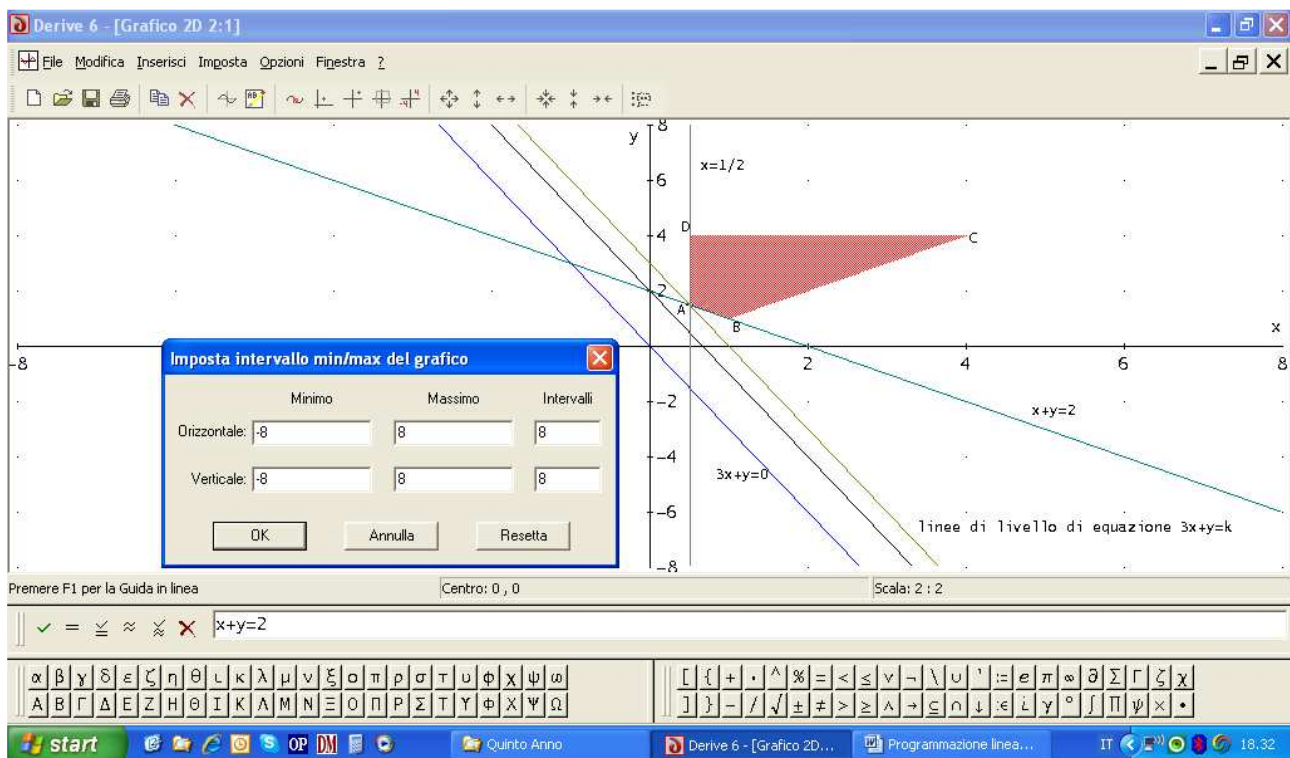
Si ricavano le rette di equazione $y=-x+2$, $x=1/2$, $y=4$ e $y=x$ e si risolve il suddetto sistema di disequazioni

`SOLVE([x + y ≥ 2, x ≥ 0.5, y ≤ 4, x - y ≤ 0], [x, y])`

$$\left[x - y \leq 0 \wedge y \leq 4 \wedge x + y \geq 2 \wedge x \geq \frac{1}{2} \right]$$

Le cui soluzioni sono rappresentate in figura dal poligono rosso (anche i punti che stanno sui lati appartengono al campo di scelta).

Si determinano l'insieme dei punti del piano per i quali la funzione economica $z=12x+4y$ è uguale a 0 ponendo $12x+4y=0$ cioè $3x+y=0$; si disegnano delle rette parallele ad essa verso il segmento orientato verso il punto (12;4) [senso di crescita della funzione obiettivo] le cui coordinate sono quelle dei coefficienti della funzione obiettivo, fino ad incontrare il vertice A del poligono di frequenza (punto di minimo). Si osserva, inoltre, che facendo scorrere tali rette lungo il campo di scelta si perviene ad individuare il punto C che è di massimo.



Le coordinate del punto sono date dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x + y = 2 \end{cases}$$

SOLVE([x = 0.5, x + y = 2], [x, y])

$$\left[x = \frac{1}{2} \wedge y = \frac{3}{2} \right]$$

Il corrispondente valore di minimo della funzione é:

$$z = 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$z = 3$$

ESERCIZIO 2 (utilizzo del metodo grafico)

Esempio astratto

Determinare il massimo e il minimo della funzione $z = -4x + 6y + 1$ nel campo di scelta definito dalle seguenti disuguaglianze:

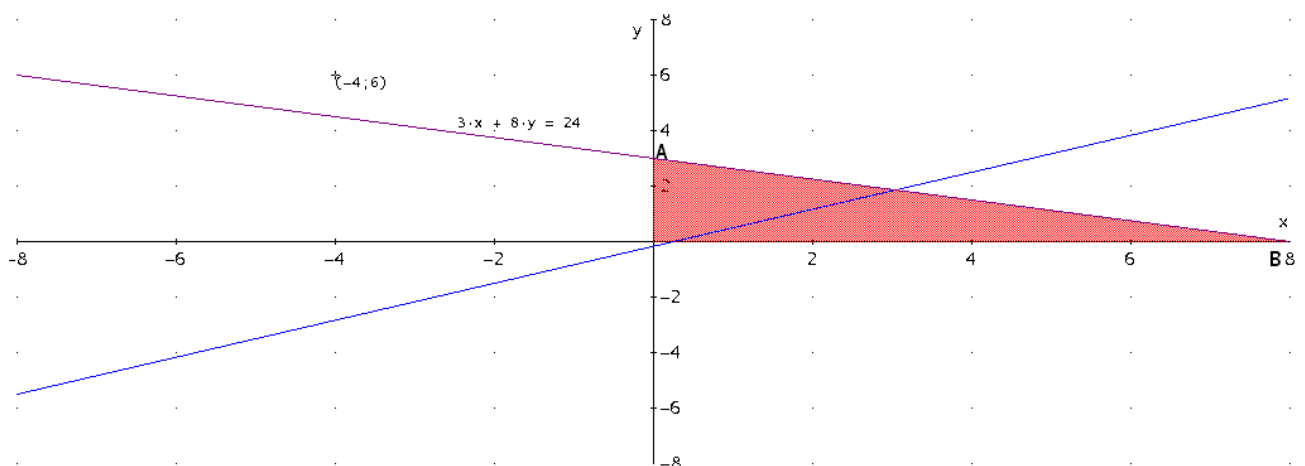
$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad 3x + 8y \leq 24$$

Si ricavano le rette di equazione $x=0$, $y=0$ $3x+8y=24$ e si risolve il suddetto sistema di disequazioni

$$\text{SOLVE}([x \geq 0, y \geq 0, 3 \cdot x + 8 \cdot y \leq 24], [x, y])$$

$$[3 \cdot x + 8 \cdot y \leq 24 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0]$$

Le cui soluzioni sono rappresentate in figura dal poligono rosso (anche i punti che stanno sui lati appartengono al campo di scelta).



Si determinano l'insieme dei punti del piano per i quali la funzione economica $z = -4x + 6y + 1$ è uguale a 0 ponendo $-4x + 6y + 1 = 0$; si disegnano delle rette parallele ad essa verso il segmento orientato verso il punto $(-4; 6)$ [senso di crescita della funzione obiettivo, fino ad incontrare il vertice A del poligono di frequenza (punto di massimo); facendo scorrere tali rette lungo il campo di scelta si perviene ad individuare il punto B che è di minimo.

Le coordinate dei punti si ricavano rispettivamente dai seguenti sistemi:

per il punto A (massimo):

$$\text{SOLVE}([3 \cdot x + 8 \cdot y = 24, x = 0], [x, y])$$

$$[x = 0 \wedge y = 3]$$

per il punto B (minimo):

$$\text{SOLVE}([3 \cdot x + 8 \cdot y = 24, y = 0], [x, y])$$

$$[x = 8 \wedge y = 0]$$

I corrispondenti valori della funzione sono:

per il punto A (0;3) di massimo:

$$z := -4 \cdot x + 6 \cdot y + 1$$

$$x := 0$$

$$y := 3$$

$$z$$

19

per il punto B (8;0) di minimo:

$$z := -4 \cdot x + 6 \cdot y + 1$$

19

$$x := 8$$

$$y := 0$$

$$z$$

-31

ESERCIZIO 3 (utilizzo del metodo grafico)

Esempio concreto

Un'impresa produce due prodotti A e B disponendo giornalmente di 200 ore operaio e di 96 ore macchina. Il processo tecnico-produttivo è caratterizzato dai seguenti dati:

- Ogni unità del prodotto A richiede 20 minuti di lavoro operaio e 6 minuti di lavoro-macchina;
- Ogni unità del prodotto B richiede 45 minuti di lavoro operaio e 25 minuti di lavoro-macchina;

Le condizioni di mercato sono le seguenti:

- Il profitto lordo derivante dalla vendita di ciascuna unità di A è di € 60;
- Il profitto lordo derivante dalla vendita di ciascuna unità di B è di € 200;

Determinare la quantità che occorre produrre di ciascun prodotto affinché il prodotto lordo complessivo sia massimo.

DATI

x = quantità prodotta di A

y = quantità prodotta di B

La funzione obiettivo che esprime il profitto lordo complessivo è:

$$z = G = 60x + 200y$$

Per iniziare, le ore le trasformiamo in minuti:

$$(200 \text{ ore} = 12000 \text{ min e } 96 \text{ ore} = 5760 \text{ min})$$

si hanno pertanto i seguenti vincoli:

- vincolo derivante dalla disponibilità complessiva di lavoro-operaio:

$$20x + 45y \leq 12000 \quad (\text{vincolo NON banale})$$

- vincolo derivante dalla disponibilità complessiva di lavoro-macchina:

$$6x + 25y \leq 5760 \quad (\text{vincolo NON banale})$$

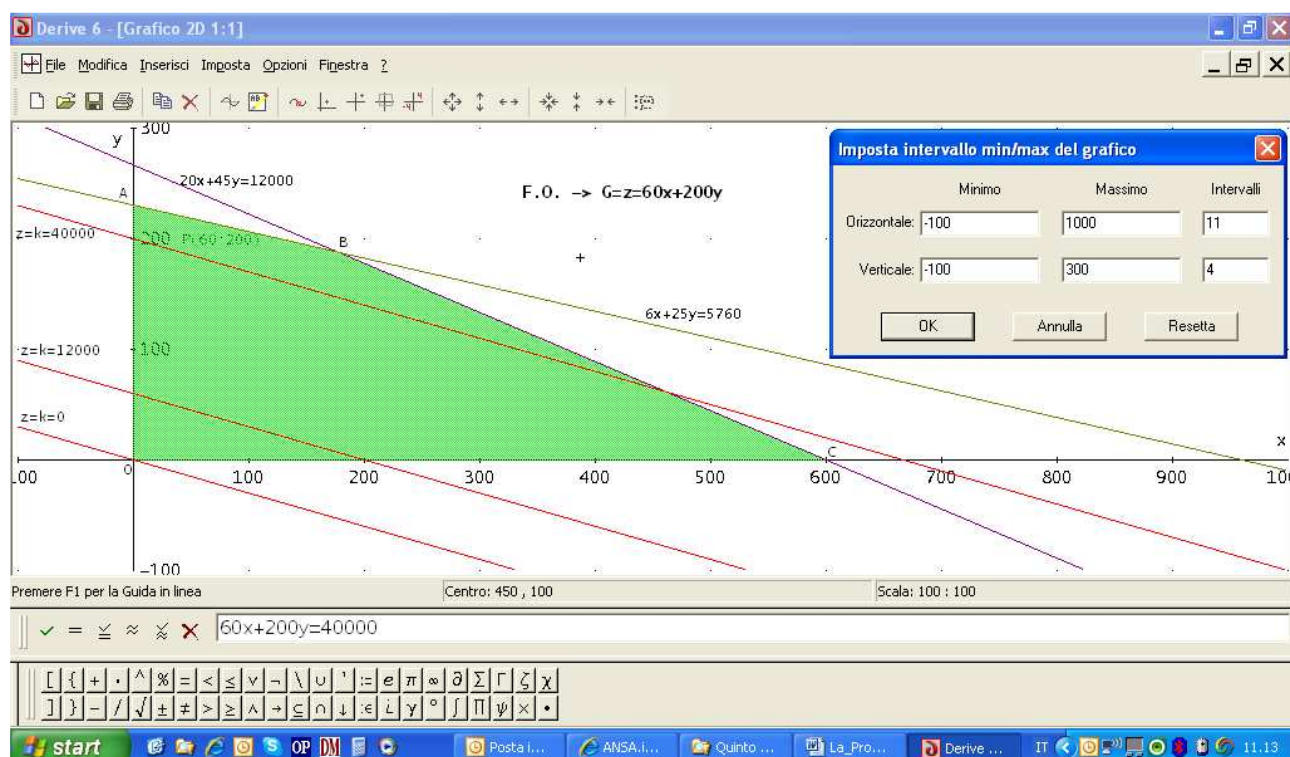
- vincoli di segno (condizioni di NON negatività):

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad (\text{vincoli banali})$$

Pertanto si tratta di massimizzare la F.O. $z = G = 60x + 200y$ soggetta ai vincoli:

$$\begin{cases} 20x + 45y \leq 12.000 \\ 6x + 25y \leq 5.760 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Trasformate le disequazioni in equazioni, si rappresentano nel piano le rette e, messi in evidenza i semipiani rappresentati dalle relazioni di vincolo, si ottiene l'insieme intersezione cioè la regione limitata (poligono convesso) messa in evidenza nella seguente figura:



Facendo scorrere la retta di equazione $z=k \rightarrow 60x+200y=k$ (per $k=0$, $k=12000$, $k=40000$) lungo il campo di scelta verso il punto **P(60,200)**, si nota che il vertice **B** coincide con il massimo della funzione obiettivo; le coordinate di tale punto sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 20x + 45y = 12.000 \\ 6x + 25y = 5.760 \end{cases}$$

`SOLVE([20·x + 45·y = 12000, 6·x + 25·y = 5760], [x, y])`

$$\left[x = \frac{4080}{23} \wedge y = \frac{4320}{23} \right]$$

$$\text{APPROX}\left(\left[x = \frac{4080}{23} \wedge y = \frac{4320}{23} \right], 1\right)$$

$$[x = 177 \wedge y = 187]$$

Si conclude che, subordinatamente ai vincoli esistenti, conviene produrre le quantità $x=177$ del prodotto A e $y=187$ del prodotto B perché il profitto sia massimo: $G(177;187)= 48020$ €

ESERCIZIO 4 (utilizzo del metodo grafico)

Esempio concreto

Un calzaturificio può produrre due tipi diversi di scarponi avendo a disposizione settimanalmente 5,04 q di cuoio e 4,4 q di pelle. Per ogni paio di scarponi del primo tipo occorrono 1,6 kg di cuoio e 1,2 kg di pelle, mentre per ogni paio di scarponi del secondo tipo occorrono 1,2 kg di cuoio e 1,1 kg di pelle.

Sapendo che dalla vendita di ogni paio del primo tipo si guadagna € 10 e dalla vendita di ogni paio del secondo tipo si guadagna € 9, determinare quante paia del primo e quante paia del secondo tipo conviene produrre per ottenere il massimo guadagno.

DATI

x = quantità prodotta di scarponi del I° tipo

y = quantità prodotta di scarponi del II° tipo

La funzione obiettivo che esprime il profitto lordo complessivo è:

$$z = G = 10x + 9y$$

Per iniziare, i dati espressi in quintali li trasformiamo in chilogrammi:

- $1q:100kg=5,04q:x \rightarrow x=504 \text{ kg}$
- $1q:100kg=4,4q:x \rightarrow x=440 \text{ kg}$

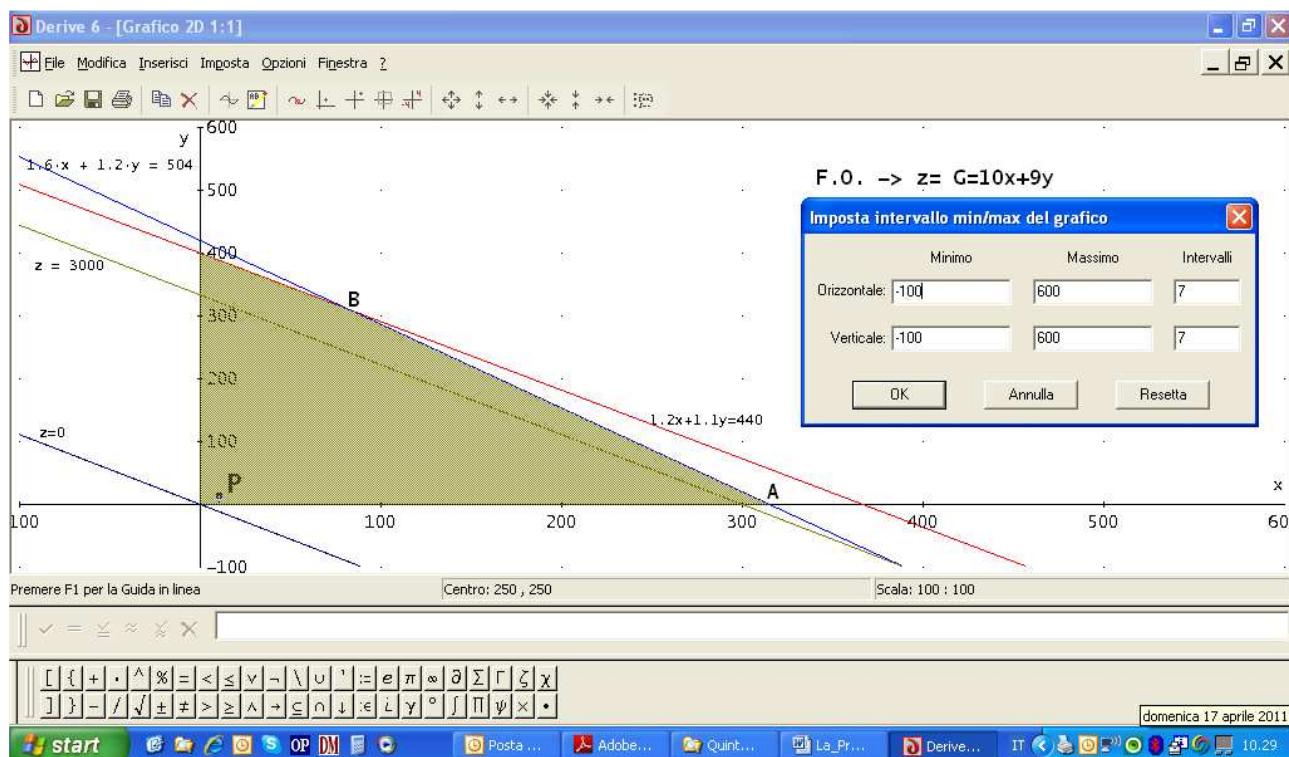
si hanno pertanto i seguenti vincoli:

- vincolo derivante dalla disponibilità complessiva di cuoio:
 $1,6x + 1,2y \leq 504$ (vincolo NON banale)
- vincolo derivante dalla disponibilità complessiva di pelle:
 $1,2x + 1,1y \leq 440$ (vincolo NON banale)
- vincoli di segno (condizioni di NON negatività):
 $x \geq 0 \quad y \geq 0$ (vincoli banali - **interi**)

Pertanto si tratta di massimizzare la F.O. $z = G = 10x + 9y$ soggetta ai vincoli:

$$\begin{cases} 1,6x + 1,2y \leq 504 \\ 1,2x + 1,1y \leq 440 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Trasformate le disequazioni in equazioni, si rappresentano nel piano le rette e, messi in evidenza i semipiani rappresentati dalle relazioni di vincolo, si ottiene l'insieme intersezione cioè la regione limitata (poligono convesso) messa in evidenza nella seguente figura:



Facendo scorrere la retta di equazione $z=k \rightarrow 10+9y=k$ (per $k=0$, $k=3000$) lungo il campo di scelta verso il punto $P(10,9)$, si nota che il vertice B coincide con il massimo della funzione obiettivo; le coordinate di tale punto sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 1,6x + 1,2y = 504 & \mathbf{r} \\ 1,2x + 1,1y = 440 & \mathbf{s} \end{cases}$$

`SOLVE([1.6*x + 1.2*y = 504, 1.2*x + 1.1*y = 440], [x, y])`

$$\left[x = \frac{165}{2} \wedge y = 310 \right]$$

$$\text{APPROX}\left(\left[x = \frac{165}{2} \wedge y = 310 \right], 2\right)$$

$$[x = 82.5 \wedge y = 310]$$

Tale punto NON può essere accettato come soluzione dovendo essere x e y **interi**.

Pertanto, muovendosi lungo le due rette $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, in prossimità del vertice $\mathbf{B}$, occorre individuare un punto a coordinate intere.

A tal fine:

- attribuiamo dei valori crescenti alla y fino a trovare il corrispettivo valore intero x nell'equazione di una retta
- attribuiamo dei valori crescenti alla x fino a trovare il corrispettivo valore intero y nell'equazione dell'altra retta :

Risolviendo l'equazione della retta **S** $\rightarrow 1,2x + 1,1y = 440$ rispetto alla x si ha:

SOLVE(1.2•x + 1.1•y = 440, x)

$$x = \frac{11 \cdot (400 - y)}{12}$$

Assegniamo valori crescenti alla y fino ad ottenere valori interi della x:

$$x := \frac{11 \cdot (400 - y)}{12}$$

y := 311

x

$$\frac{979}{12}$$

$$\text{APPROX}\left(\frac{979}{12}, 3\right)$$

80.6

y := 312

x

$$\frac{242}{3}$$

$$\text{APPROX}\left(\frac{242}{3}, 3\right)$$

81.5

y := 313

x

$$\frac{319}{4}$$

$$\text{APPROX}\left(\frac{319}{4}, 3\right)$$

79.7

y := 314

x

$$\frac{473}{6}$$

$$\text{APPROX}\left(\frac{473}{6}, 3\right)$$

78.8

y := 315

x

$$\frac{935}{12}$$

$$\text{APPROX}\left(\frac{935}{12}, 3\right)$$

77.9

y := 316

x

77

Abbiamo così ottenuto il punto (x=77;316)

Procediamo allo stesso modo risolvendo l'equazione della retta

r -> 1,6x+1.2y=504 rispetto alla y:

SOLVE(1.6•x + 1.2•y = 504, y)

$$y = \frac{4 \cdot (315 - x)}{3}$$

Assegniamo valori crescenti alla x fino ad ottenere valori interi della y:

$$y := \frac{4 \cdot (315 - x)}{3}$$

$$x := 83$$

$$y$$

$$\frac{928}{3}$$

$$\text{APPROX}\left(\frac{928}{3}, 3\right)$$

$$309.3$$

$$x := 84$$

$$y$$

$$308$$

Abbiamo così ottenuto il punto (x=84;308)

CALCOLIAMO ORA I VALORI DELLA FUNZIONE OBIETTIVO CORRISPONDENTI AI DUE PUNTI TROVATI:

f(77;316)

$$z := 10 \cdot x + 9 \cdot y$$

$$x := 77$$

$$y := 316$$

$$z$$

$$3614$$

f(84;308)

$$z := 10 \cdot x + 9 \cdot y$$

$$x := 84$$

$$y := 308$$

$$z$$

$$3612$$

CONCLUSIONE:

Da ciò si deduce che al calzaturificio conviene produrre 77 paia di scarponi del primo tipo e 316 paia di scarponi del secondo tipo per ottenere il massimo guadagno di € 3614.

ESERCIZIO 5 (utilizzo del metodo grafico)

Esempio concreto

Un'agenzia turistica deve organizzare un viaggio in aereo al quale partecipano 750 persone delle quali 450 hanno prenotato la seconda classe e le altre la prima classe. In base alle effettive disponibilità, tutti i posti sono stati prenotati. L'agenzia può noleggiare due tipi di aerei, A e B; il tipo A ha 30 posti di prima classe e 30 di seconda, mentre il tipo B ne ha 30 di prima e 80 di seconda. Sapendo che ogni volo con un aereo di tipo A viene a costare all'agenzia € 30.000 (trentamila) e ogni volo con un aereo di tipo B € 50.000 (cinquantamila), determinare quanti aerei di ciascun tipo occorre noleggiare per avere il minimo costo.

DATI

x = numero aerei tipo A

y = numero aerei tipo B

La funzione obiettivo che esprime il costo in migliaia di euro è:

$$z=C=30x+50y$$

I vincoli ai quali sono soggette le variabili d'azione sono i seguenti:

- vincolo derivante dalla disponibilità dei posti di:

$$30x+30y \geq 300 \quad (\text{vincolo NON banale})$$

(il nr. dei posti di 1^a classe che conviene all'agenzia vengano prenotati per noleggiare i due tipi di aerei dovrà essere almeno quanto il nr. complessivo di posti disponibili di 1^a classe!!)

- vincolo derivante dalla disponibilità dei posti di 2^a classe:

$$30x+80y \geq 450 \quad (\text{vincolo NON banale})$$

(il nr. dei posti di 2^a classe che conviene all'agenzia vengano prenotati per noleggiare i due tipi di aerei dovrà essere almeno quanto il nr. complessivo di posti disponibili di 2^a classe!!)

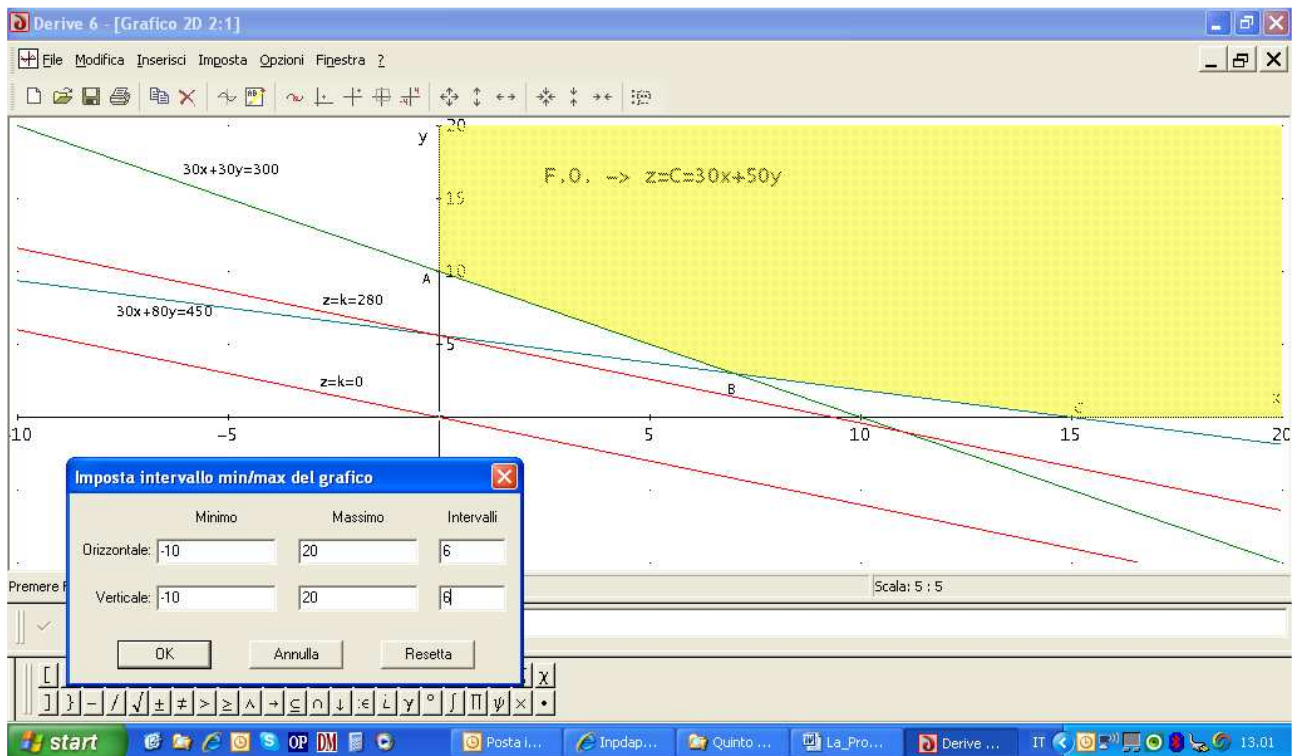
- vincoli di segno (condizioni di NON negatività):

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad (\text{vincoli banali - **interi**})$$

Pertanto si tratta di minimizzare la F.O. $z = C = 30x+50y$ soggetta ai vincoli:

$$\begin{cases} 30x+30y \geq 300 \\ 30x+80y \geq 450 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Trasformate le disequazioni in equazioni, si rappresentano nel piano le rette e, messi in evidenza i semipiani rappresentati dalle relazioni di vincolo, si ottiene l'insieme intersezione cioè la regione ammissibile illimitata messa in evidenza nella seguente figura:



Facendo scorrere la retta di equazione $z=k \rightarrow 30x+50y=k$ (per $k=0$, $k=280$, $k=40000$) lungo il campo di scelta verso il punto $P(60,200)$, si nota che il vertice **B** coincide con il minimo della funzione obiettivo; le coordinate di tale punto sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 30x + 30y = 300 \\ 30x + 80y = 450 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 3x + 8y = 45 \end{cases}$$

`SOLVE([x + y = 10, 3·x + 8·y = 45], [x, y])`

$$[x = 7 \wedge y = 3]$$

Si conclude che, subordinatamente ai vincoli esistenti, il costo è minimo se il viaggio viene organizzato con 7 aerei di tipo A e 3 di tipo B;

Tale costo minimo vale: $C(7,3) = 360.000$ € (in quanto espresso in migliaia).

ESERCIZIO 6 (utilizzo del metodo grafico)

Esempio concreto

Un'industria meccanica produce giornalmente due componenti A e B per auto, che vende rispettivamente a € 128 e € 146 l'una. Ogni componente A richiede 14 minuti di lavorazione al tornio e 10 minuti alla smerigliatrice. Ogni componente B richiede 8 minuti di lavorazione al tornio e 16 minuti alla smerigliatrice. Il tornio può lavorare 8 ore al giorno e la smerigliatrice 10 ore al giorno. Quale deve essere la produzione giornaliera per ottenere il massimo ricavo nel rispetto dei vincoli imposti dalle macchine?

DATI

x = numero dei componenti di A

y = numero dei componenti di B

La funzione obiettivo che esprime il profitto è:

$$z = G = 128x + 146y$$

Per iniziare, le ore le trasformiamo in minuti:

$$1:60 = 8:x \quad \rightarrow (8 \text{ ore} = 480 \text{ min})$$

$$1:60 = 10:x \quad \rightarrow (10 \text{ ore} = 600 \text{ min})$$

Pertanto, i vincoli tecnici ai quali sono soggette le variabili d'azione sono i seguenti:

$$14x + 8y \leq 480 \quad \text{e} \quad 10x + 16y \leq 600 \quad (\text{vincoli NON banali})$$

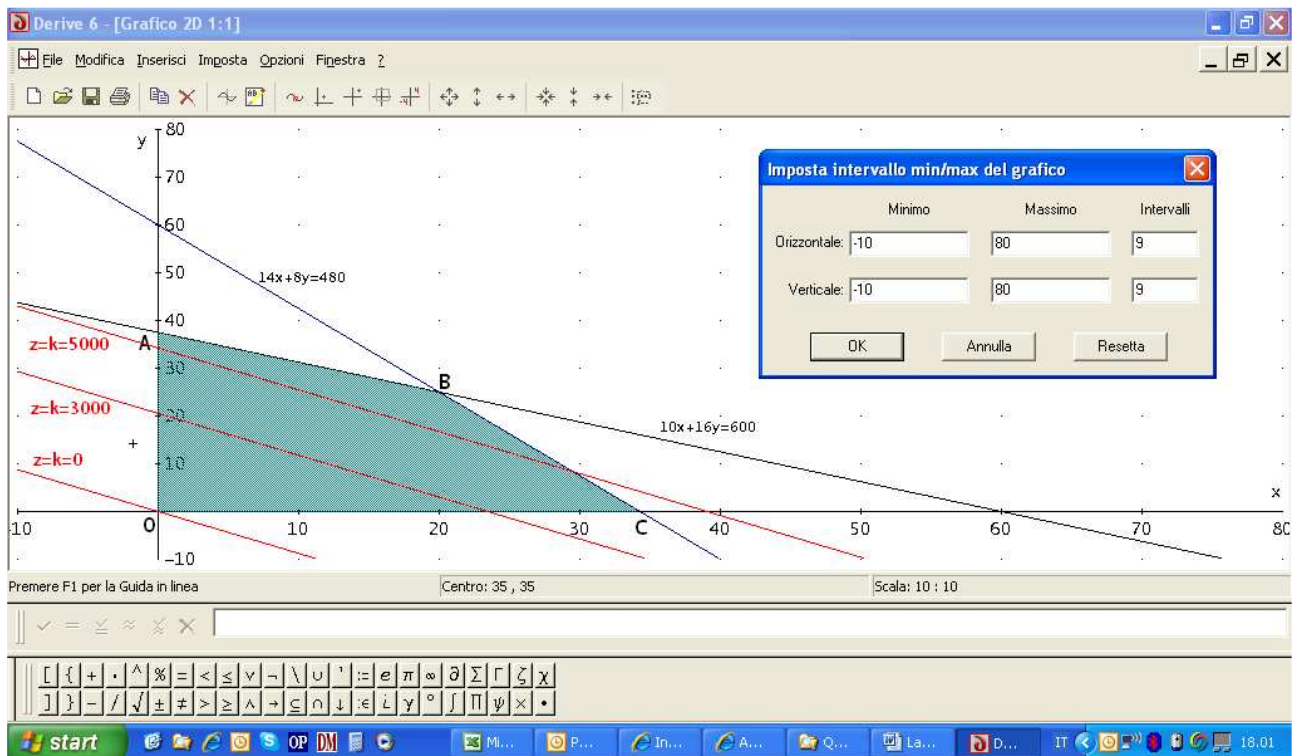
mentre i vincoli di segno che esprimono le condizioni di NON negatività sono:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad (\text{vincoli banali - **interi**})$$

Pertanto si tratta di massimizzare la F.O. $z = G = 128x + 146y$ soggetta ai vincoli:

$$\begin{cases} 14x + 8y \leq 480 \\ 10x + 16y \leq 600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Trasformate le disequazioni in equazioni, si rappresentano nel piano le rette e, messi in evidenza i semipiani rappresentati dalle relazioni di vincolo, si ottiene l'insieme intersezione cioè la regione ammissibile (poligono convesso) messa in evidenza nella seguente figura:



Facendo scorrere la retta di equazione $z=k \rightarrow 128x+146y=k$ (per $k=0, k=3000, k=5000$) lungo il campo di scelta verso il punto $P(128,146)$, si nota che il vertice **B** coincide con il massimo della funzione obiettivo; le coordinate di tale punto sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 14x + 8y = 480 \\ 10x + 16y = 600 \end{cases}$$

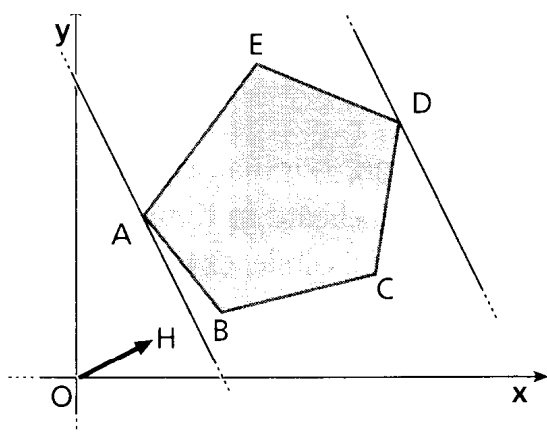
`SOLVE([14·x + 8·y = 480, 10·x + 16·y = 600], [x, y])`

$$[x = 20 \wedge y = 25]$$

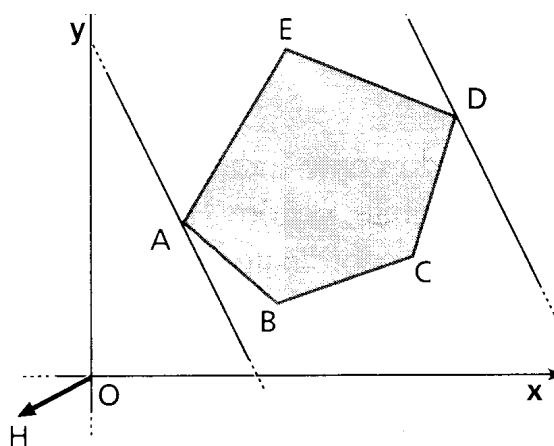
Si conclude che, subordinatamente ai vincoli esistenti, la produzione ottimale deve essere di 20 componenti del primo tipo e 25 del secondo;

Tale profitto vale: $G(20,25)= 6210 \text{ €}$.

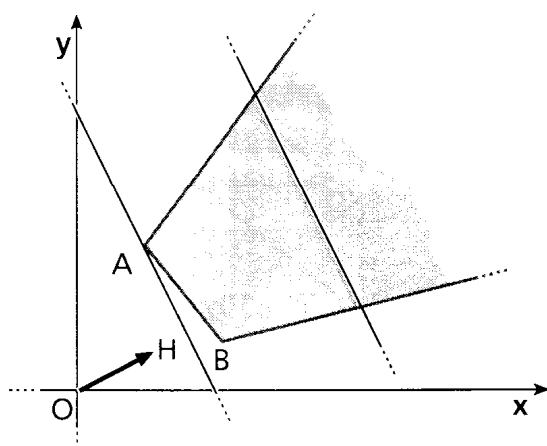
**RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE DI POSSIBILI REGIONI AMMISSIBILI
E DELL'ANDAMENTO DELLA FUNZIONE $z=ax+by+c$, VISTO ATTRAVERSO
LE LINEE DI LIVELLO E IL VETTORE H, PERPENDICOLARE A ESSE**



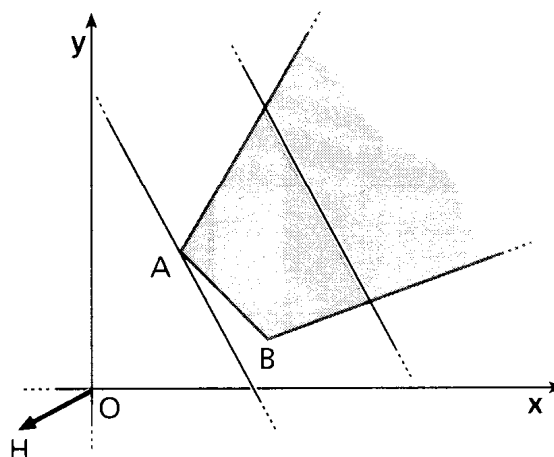
a. Minimo in A e massimo in D.



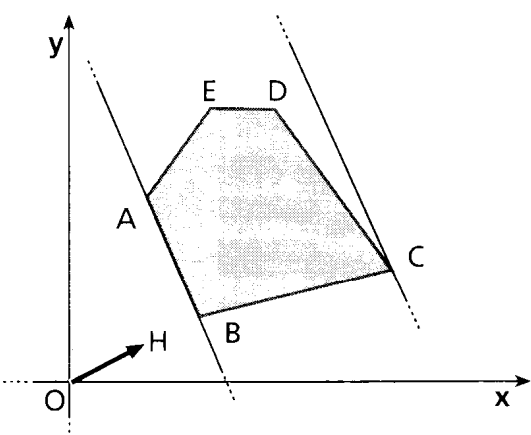
b. Minimo in D e massimo in A.



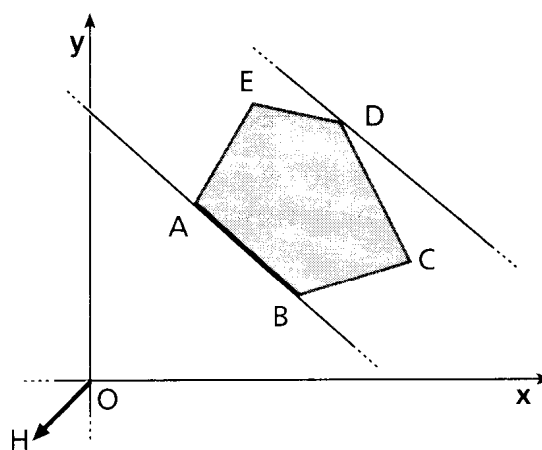
c. Minimo in A e nessun massimo.



d. Nessun minimo e massimo in A.



e. Infiniti minimi nel segmento AB e un massimo in C.



f. Un minimo in D e infiniti massimi nel segmento AB.