

8

Programmazione lineare

8.1 Campi di applicazione

La teoria matematica della *programmazione lineare* (P.L.) trova ampie applicazioni in tutti i settori dell'economia moderna:

- industria;
- commercio;
- trasporti;
- comunicazioni.

La pianificazione industriale e agricola, la distribuzione dei prodotti, l'organizzazione della rete nazionale e internazionale dei trasporti, utilizzano, per migliorare la loro efficienza, le tecniche di programmazione.

Quando il problema da risolvere riguarda un'attività che richiede investimenti di fattori quantificabili e misurabili, ovvero richiede risorse come denaro, macchinari, materie prime, e produce beni a loro volta quantificabili, si può cercare di:

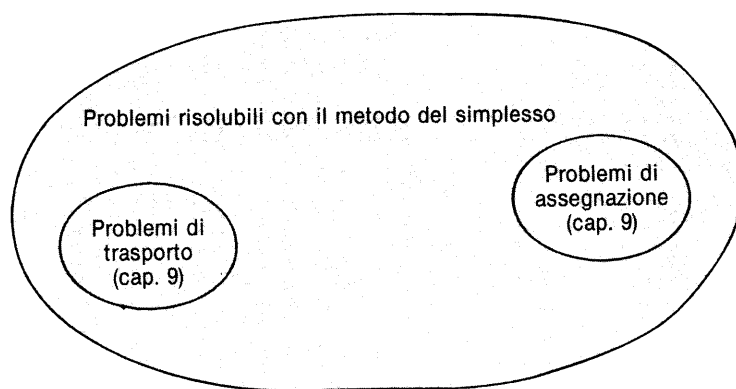
- 1) minimizzare le risorse che devono essere impiegate;
- 2) massimizzare il valore ottenuto dalle risorse impiegate.

Molti problemi riguardanti la massimizzazione e la minimizzazione, ovvero molti problemi di *ottimizzazione* possono essere risolti mediante le *tecniche di programmazione* tra le quali la più usata è la *programmazione lineare*.

La larghissima diffusione di questa tecnica è dovuta alla semplicità delle condizioni poste dal modello: la condizione di linearità.

Infatti, per descrivere un problema, la programmazione lineare utilizza modelli matematici in cui *tutte le funzioni sono lineari*¹.

¹ Una funzione è lineare quando le sue variabili sono di primo ordine.

Fig. 8.1 - Problemi di programmazione lineare

Poiché il termine *programmazione* deve essere inteso nel senso di *pianificazione*, la programmazione lineare comprende la pianificazione di attività che hanno come scopo un risultato ottimale, ovvero un risultato che, in base al modello matematico (lineare) formulato, permetta di raggiungere l'obiettivo nel modo migliore.

Si può affermare che:

la programmazione lineare serve per determinare l'allocazione ottimale di risorse disponibili in quantità limitata, per ottimizzare il raggiungimento di un obiettivo prestabilito, in condizioni di certezza.

Formulato il problema, costruito un modello matematico lineare, si possono utilizzare, per ottenere la miglior soluzione, algoritmi matematici standard, il più importante e generale dei quali è il *metodo del simplesso*, che può essere applicato a qualsiasi problema di P.L. (vedi par. 8.5).

Per problemi molto diffusi, quali il problema dei trasporti e il problema delle assegnazioni (vedi cap. 9), sono state sviluppate procedure particolari, più efficienti del simplesso, ma utilizzabili solamente per quei particolari tipi di problemi.

8.2 Formulazione di un modello di programmazione lineare

Rientrano tra i problemi di programmazione lineare una vasta classe di problemi che soddisfano le seguenti condizioni:

a) le variabili di decisione¹ sono non-negative (positive o nulle);

¹ Sono variabili di decisione le variabili controllabili da chi assume le decisioni (vedi par. 7.3).

- b) il criterio per selezionare il miglior valore delle variabili di decisione può essere espresso da una funzione lineare di queste variabili, ovvero una funzione matematica che coinvolga solo le prime potenze delle variabili e nessun prodotto tra le variabili stesse. Normalmente tale funzione viene detta *funzione obiettivo*;
- c) le limitazioni che regolano il processo, ad esempio la scarsità della materia prima, devono essere espresse come un insieme di equazioni o disequazioni lineari; questo insieme è denominato *insieme dei vincoli*.

La soluzione del problema di P.L. consiste nel determinare i valori delle variabili di decisione in modo tale che la funzione obiettivo assuma un massimo (o un minimo).

Per costruire un modello di programmazione lineare occorre seguire i seguenti passi:

- 1) identificare le variabili di decisione e rappresentarle in termini di simboli algebrici;
- 2) identificare tutte le restrizioni o vincoli del problema ed esprimerli come equazioni o disequazioni lineari delle variabili di decisione;
- 3) identificare l'obiettivo o criterio e rappresentarlo come una funzione lineare delle variabili di decisione.

Questi passi basilari verranno illustrati nei seguenti esempi.

■ ESEMPIO 8.1 ■

Una ditta produce due tipi, *A* e *B*, di sedie che richiedono una determinata materia prima per l'imbottitura.

Per produrre una sedia di tipo *A* sono necessarie 4 ore di lavoro e 2 kg di materia prima, mentre per produrre una sedia di tipo *B* sono necessarie 3 ore di lavoro e 4 kg di materia prima.

Il profitto unitario per le sedie di tipo *A* è di 15 mila lire, mentre per la sedia di tipo *B* il profitto unitario è di 21 mila lire.

La fornitura del tipo di materiale richiesto è limitata a 160 kg alla settimana; la disponibilità settimanale di mano d'opera è 240 ore.

Formulare un modello di programmazione lineare per determinare le quantità di sedie di tipo *A* e di tipo *B* che devono essere prodotte allo scopo di massimizzare il profitto.

— *Prima fase*: determinazione delle variabili di decisione

I valori da determinare sono il numero di sedie di tipo *A* e di tipo *B* che devono essere prodotte in una settimana.

Per rappresentare queste variabili con dei simboli algebrici si può utilizzare:

x_A produzione settimanale di sedie di tipo *A*
 x_B produzione settimanale di sedie di tipo *B*

— *Seconda fase: determinazione dei vincoli*

I vincoli sono le disponibilità limitate delle due risorse: lavoro e materiale.

Il tipo A richiede 4 ore di lavoro per ogni unità e il numero di unità prodotte è x_A , quindi per il tipo A sono necessarie $4x_A$ ore di lavoro.

Il tipo B richiede 3 ore di lavoro per ogni unità e il numero di unità prodotte è x_B , quindi per il tipo B sono necessarie $3x_B$ ore di lavoro.

La richiesta totale di lavoro risulta: $4x_A + 3x_B$, che non deve superare le 240 ore.

Allora il vincolo può essere scritto con la disequazione:

$$4x_A + 3x_B \leq 240$$

Analogamente, per quanto riguarda la richiesta di materia prima, sono necessari $2x_A$ kg per il tipo A e $4x_B$ kg per il tipo B; poiché la disponibilità è limitata a 160 kg, si ha il vincolo:

$$2x_A + 4x_B \leq 160$$

inoltre le variabili x_A e x_B possono solo assumere valori non negativi, ovvero devono soddisfare i vincoli di non negatività.

$$x_A \geq 0 \quad x_B \geq 0$$

— *Terza fase: definizione dell'obiettivo*

L'obiettivo è massimizzare il profitto totale delle vendite.

Assumendo che esista un mercato perfetto, ovvero un mercato che assorbe tutta la produzione, il profitto totale delle vendite è (in migliaia di lire):

$$Z = 15x_A + 21x_B$$

— *Conclusione*

Il modello di programmazione lineare per il problema esposto è la determinazione dei valori di x_A e x_B che rendono massima la funzione obiettivo:

$$Z = 15x_A + 21x_B$$

soggetta ai vincoli:

$$4x_A + 3x_B \leq 240$$

$$2x_A + 4x_B \leq 160$$

con $x_A, x_B \geq 0$

Si è visto dagli esempi precedenti che la formulazione generale di un problema di programmazione lineare prevede una funzione obiettivo e un sistema di vincoli.

In generale un problema di programmazione lineare viene impostato nel seguente modo standard:

siano $x_1, x_2, \dots, x_n$, le variabili di decisione; determinare il massimo (o il minimo) della funzione:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad [8.1]$$

soggetta ai vincoli:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \end{aligned} \quad [8.2]$$

...

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k$$

con:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad [8.3]$$

dove a_{ij} , b_i , c_j sono costanti definite dal problema; i vincoli [8.2] possono essere di tipo: $\leq$, $\geq$ o $=$.

La [8.1] è la funzione obiettivo; l'insieme di disequazioni (o equazioni) [8.2] costituisce il sistema dei vincoli *non banali*, mentre le condizioni di *non negatività* [8.3] sono i vincoli *banali*.

Tutti i vincoli devono ammettere l'uguaglianza (minor uguale, maggior uguale o uguale) in quanto l'insieme delle *soluzioni ammissibili*, ovvero l'insieme di tutte le possibili soluzioni che soddisfano *tutti* i vincoli, deve essere un insieme chiuso, vale a dire un insieme che contiene tutti i punti della propria frontiera¹.

Nel seguito le costanti della funzione obiettivo saranno sempre indicate con c_j , i termini noti delle disequazioni con b_i e i coefficienti delle variabili nei vincoli con a_{ij} .

8.3 Metodo grafico

Per risolvere un problema di programmazione lineare con *due sole variabili di decisione* (vedi esempio 8.1) si può usare il *metodo grafico*.

Questo metodo consiste nel rappresentare graficamente i vincoli su un piano

¹ Un punto x appartenente ad un insieme E si dice di frontiera se non è né interno né esterno ad E , ovvero se in ogni intorno sferico di x vi è almeno un punto che appartiene ad E e un punto che appartiene al suo complementare $\bar{E}$.

(x_1, x_2) e individuare il valore massimo ammesso per la funzione obiettivo sul modello grafico.

Per vedere come si può costruire la rappresentazione grafica, si considera l'esempio 8.1 in cui le variabili x_A e x_B sono indicate rispettivamente con x_1 e x_2 , per uniformità di notazioni.

Si deve determinare il massimo della funzione obiettivo:

$$Z = 15x_1 + 21x_2 \quad [8.4]$$

soggetta ai vincoli:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 240 \quad [8.5]$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 160$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad [8.6]$$

Poiché le variabili sono solo due, le disequazioni possono essere rappresentate sul piano $x_1 x_2$.

I vincoli banali ($x_1, x_2 \geq 0$), assicurano che non vi possono essere valori negativi delle variabili, pertanto è sufficiente rappresentare il quadrante positivo: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Per rappresentare le disequazioni sul quadrante positivo si tracciano le *rette* che delimitano la zona di valori accettabili.

Per la prima disequazione si traccia la retta (*vedi* fig. 8.1):

$$4x_1 + 3x_2 = 240$$

Per tracciarla è sufficiente individuare e segnare su un piano cartesiano $x_1 x_2$ due punti appartenenti alla retta tracciandone poi la congiungente; i punti possono essere individuati assegnando un valore ad una variabile e determinando il valore dell'altra per mezzo dell'equazione della retta. Ad esempio, se si assegna $x_1 = 0$, si ottiene $4 \cdot 0 + 3 \cdot x_2 = 240$, da cui: $x_2 = 80$; se si assegna $x_2 = 0$ si ottiene $4x_1 + 3 \cdot 0 = 240$, da cui $x_1 = 60$.

I punti:

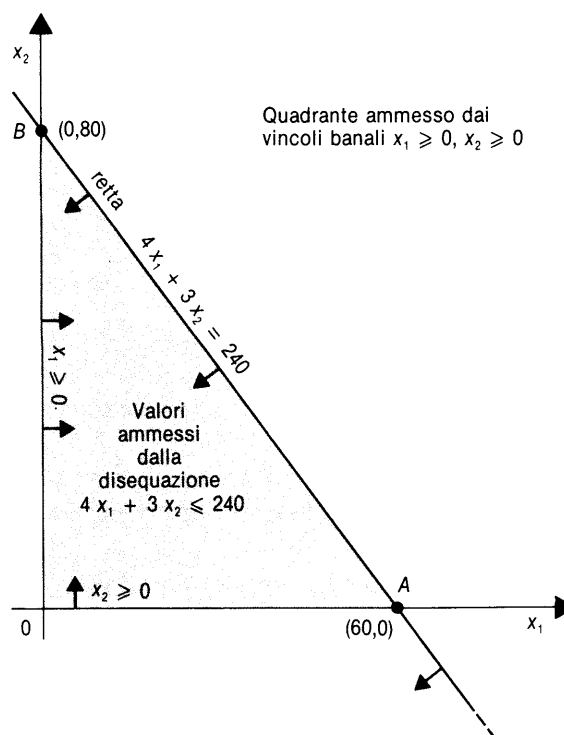
x_1	x_2
0	80
60	0

sono riportati sul grafico di fig. 8.2; unendoli e prolungando la retta nei due versi, si ottiene il grafico della retta.

La retta divide il piano in due semipiani, uno solo dei quali soddisfa la disequazione:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 240$$

Fig. 8.2



Tracciata la retta si individua il semipiano dei valori ammessi dalla disequazione; in questo caso il semipiano ammesso dalla disequazione risulta quello che comprende l'origine, in quanto il punto (0, 0) soddisfa la disequazione.

In questo modo è stato individuato il triangolo OAB che soddisfa i vincoli banali $x_1, x_2 \geq 0$ e la prima disequazione.

Procedendo poi allo stesso modo per la seconda disequazione si traccia sul grafico la retta:

$$2x_1 + 4x_2 = 160$$

e si individua la zona dei valori (x_1, x_2) tali che:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 160$$

Anche in questo caso il punto (0, 0) soddisfa la disequazione, quindi l'origine appartiene al semipiano ammissibile (fig. 8.3).

L'insieme dei punti che soddisfano *tutti* i vincoli è il quadrilatero di fig. 8.4; tale insieme di punti costituisce l'*insieme delle soluzioni ammissibili*.

Fig. 8.3

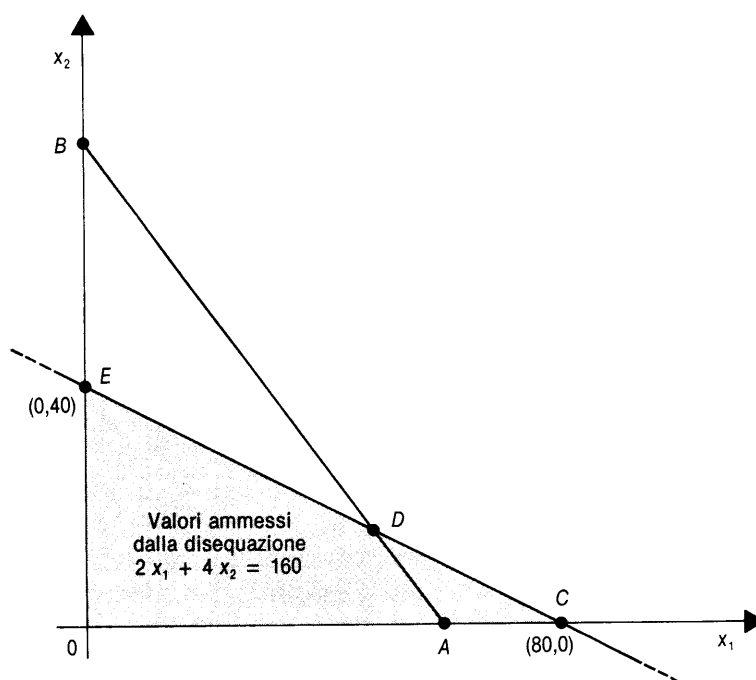
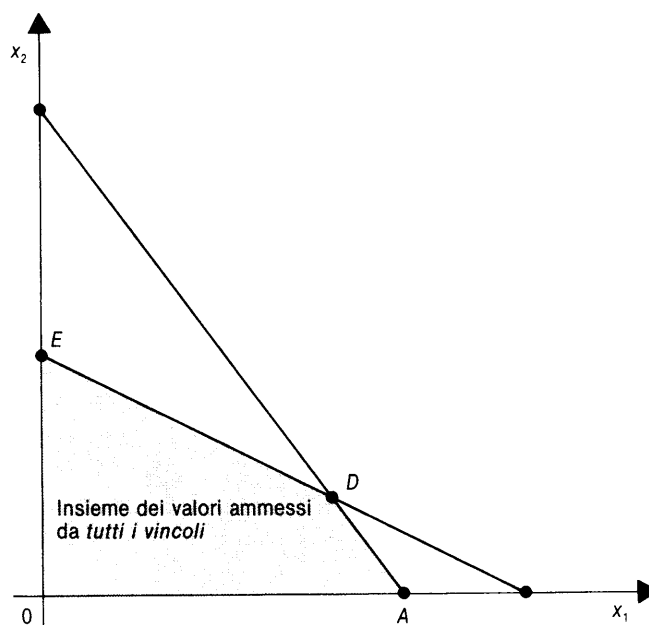


Fig. 8.4



Infine si deve determinare il punto (x_1^0, x_2^0) che rende massima la funzione obiettivo:

$$Z = 15x_1 + 21x_2$$

Questa funzione può essere rappresentata come una retta; a tal fine poniamo Z uguale ad una costante, ad esempio $Z = 500$; si può allora disegnare la retta (fig. 8.5):

$$Z = 500 = 15x_1 + 21x_2$$

che ha un segmento compreso nella zona accettabile; in tutti i punti del segmento la funzione Z assume il valore 500. Ponendo ora un valore superiore, ad esempio $Z = 700$ e tracciando la retta:

$$Z = 700 = 15x_1 + 21x_2$$

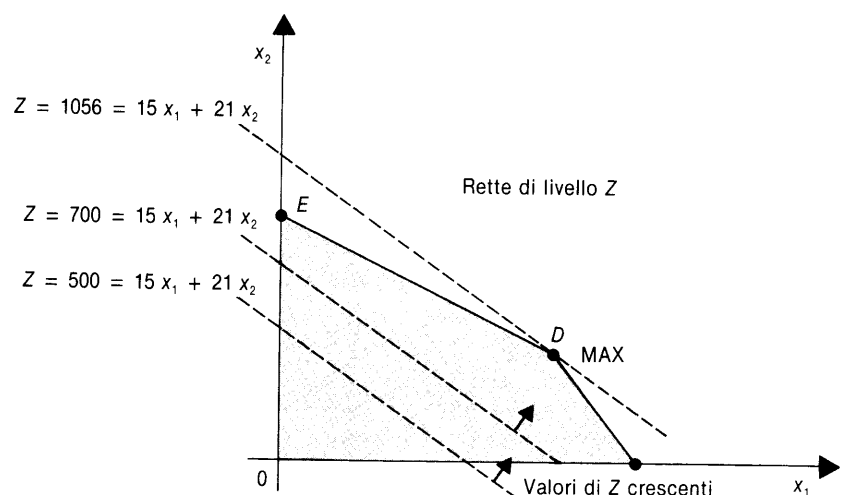
si vede (fig. 8.5) che anche questa ha molti punti in comune con l'insieme delle soluzioni, e in tutti Z assume il valore 700.

Le due rette tracciate ($Z = 500$ e $Z = 700$) hanno lo stesso coefficiente angolare ($\alpha = 15/21$), pertanto sono parallele.

Procedendo allo stesso modo si può pensare di tracciare altre rette $Z = \text{cost}$ fino a quando si trova il punto che rende massima Z e soddisfa tutti i vincoli (quindi appartiene all'insieme delle soluzioni ammissibili).

Si tratta allora di considerare la famiglia di rette parallele (*rette di livello*) comprendenti almeno un punto nella zona accettabile; poiché mediante i tentativi precedenti si è visto che tracciando rette parallele che si allontanano dall'origine il valore di Z aumenta, si deve determinare la retta, parallela alle rette di livello tracciate, più lontana possibile dall'origine.

Fig. 8.5



massima la funzione

a tal fine poniamo
ora disegnare la retta

in tutti i punti del
a un valore superiore,

ne con l'insieme delle

lo stesso coefficiente

are altre rette $Z = \text{cost}$
soddisfa tutti i vincoli

le (rette di livello)
e, poiché mediante i
le che si allontanano
la retta, parallela alle
ne

Si può vedere dalla fig. 8.5 che la retta avente il massimo valore di Z e un punto in comune con l'insieme delle soluzioni ammissibili è $Z = \text{cost}$ tangente all'insieme delle soluzioni ammissibili nel punto D .

Per determinare i valori di x_1 e x_2 in D , si osserva che è il punto di intersezione delle rette:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 240 \\ 2x_1 + 4x_2 = 160 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato dalle due precedenti equazioni, si ottengono le coordinate del punto D :

$$\begin{cases} x_1 = 48 \\ x_2 = 16 \end{cases}$$

che costituiscono la *soluzione ottimale*.

Sostituendo tali valori nella funzione obiettivo:

$$Z = 15x_1 + 21x_2$$

si ottiene:

$$Z = 15 \cdot 48 + 21 \cdot 16 = 1056$$

Il valore $Z = 1056$ è il massimo valore della funzione obiettivo [8.4] soggetta ai vincoli [8.5] e [8.6].

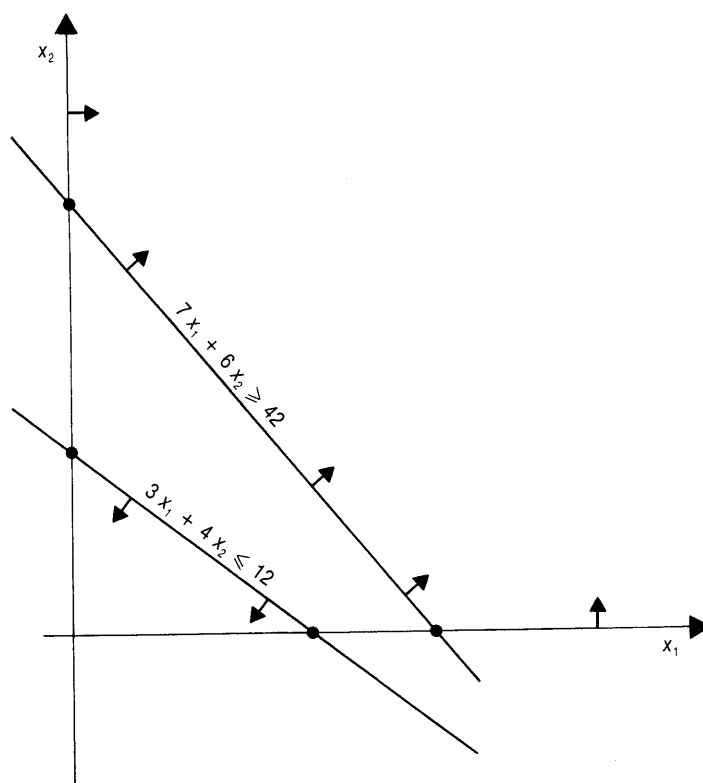
Ricordando la formulazione dell'esempio 8.1, si può asserire che la ditta realizza il massimo profitto ($Z = 1056$ migliaia di lire) se produce $x_1 = 48$ sedie di tipo A e $x_2 = 16$ sedie di tipo B .

I problemi di P.L. con due sole variabili di decisione possono essere facilmente risolti, come si è visto, utilizzando il metodo grafico illustrato; i passi fondamentali per determinare la soluzione sono:

- 1) individuare l'insieme delle soluzioni ammissibili per mezzo della rappresentazione grafica delle disequazioni;
- 2) tracciare una retta di livello $Z = \text{cost}$;
- 3) individuare la direzione dei valori crescenti per le rette di livello se si cerca un massimo o quella dei valori decrescenti se si cerca un minimo;
- 4) individuare il punto dell'insieme delle soluzioni ammissibili in cui la funzione Z assume il valore ottimale, ovvero il punto in cui la retta $Z = \text{cost}$ è tangente all'insieme delle soluzioni ammissibili e assume il valore ottimale; tale punto costituisce la soluzione ottimale;
- 5) calcolare le coordinate del punto individuato;
- 6) sostituire i valori delle coordinate del punto individuato nella funzione obiettivo e determinarne il valore.

Sono di seguito esposti alcuni esempi.

Fig. 8.9



8.4 Proprietà dell'insieme delle soluzioni ammissibili

Come visto, il metodo grafico permette di risolvere facilmente i problemi di P.L., ma sfortunatamente è applicabile solamente ai problemi in cui vi sono due o al massimo tre variabili (in questo caso si deve disegnare una figura tridimensionale).

Tuttavia le proprietà dell'insieme delle soluzioni ammissibili valide nel caso di due variabili, e visualizzabili per mezzo della rappresentazione grafica, sono valide anche nel caso di più variabili, quando non è possibile una rappresentazione grafica dell'insieme dei vincoli ed è necessario utilizzare un algoritmo puramente algebrico per risolvere il problema.

Le proprietà enunciate nel seguito sono valide per *qualsiasi numero di variabili di decisione*, anche se, per rendere maggiormente intuitiva la discussione, si utilizzeranno spesso problemi con due sole variabili.

Nel seguito si parlerà prevalentemente di valore massimo della funzione obiettivo, intendendo il valore ottimale, e nelle procedure illustrate si determinerà il massimo valore ammissibile per Z ; questa non è una restrizione, in quanto:

$$[\text{Min: } Z = f(x)] = - [\text{Max: } Z^* = -f(x)]$$

Pertanto un problema di ricerca del minimo può essere reso di ricerca del massimo cambiando il segno della funzione obiettivo.

In generale, dato un problema di P.L.:

- una soluzione ammissibile è un valore di $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ per il quale sono soddisfatti tutti i vincoli;
- una soluzione ottimale è una soluzione ammissibile che massimizza la funzione obiettivo.

Premesse queste definizioni, le proprietà fondamentali dell'insieme delle soluzioni ammissibili sulle quali si basa l'algoritmo matematico detto *metodo del simplesso*, discusso nel prossimo paragrafo, sono:

- 1) l'insieme delle soluzioni ammissibili costituisce un insieme convesso;
- 2) se esiste una soluzione ammissibile, esiste una soluzione ammissibile di base, ovvero una soluzione ammissibile che giace sui vertici della frontiera dell'insieme delle soluzioni ammissibili;
- 3) le soluzioni ammissibili di base sono in numero finito;
- 4) se la funzione obiettivo ha un massimo finito, allora almeno una soluzione ottimale è una soluzione ammissibile di base.

Le precedenti proprietà possono facilmente essere verificate, in modo intuitivo, utilizzando la rappresentazione grafica. In relazione alla prima proprietà si ricorda che:

è convesso un insieme di punti tale che, presi due punti qualsiasi ad esso appartenenti, la loro congiungente è interna all'insieme.

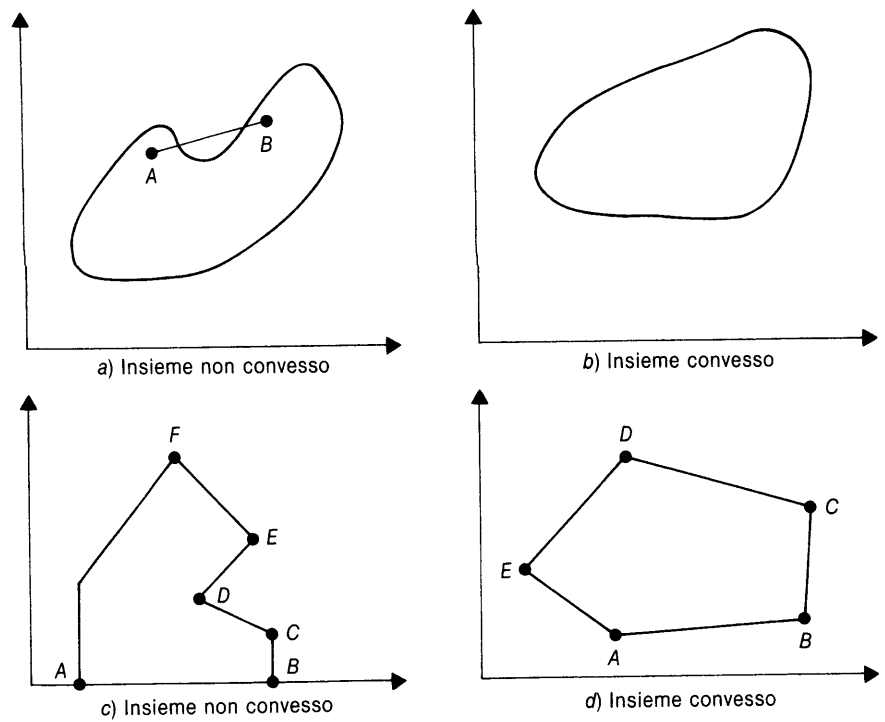
Quando un problema di P.L. ammette un insieme di soluzioni, questo insieme è sempre un insieme convesso, *poiché tutti i vincoli sono lineari*, pertanto non possono presentarsi casi come rappresentato in fig. 8.10a, in cui la frontiera è costituita da funzioni non lineari, ma non possono nemmeno presentarsi casi come in fig. 8.10c, in quanto non tutti i punti dell'insieme rappresentato possono soddisfare lo stesso sistema di vincoli, come si può facilmente verificare prolungando i segmenti $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$.

Per quanto riguarda le altre proprietà, si è visto negli esempi precedenti che, quando il valore ottimale esisteva ed era unico, era sempre in un vertice dell'insieme delle soluzioni ammissibili, e in ogni caso, se non era unico (vedi esempio 8.5), vi era almeno un vertice in cui la funzione obiettivo assumeva il valore ottimale.

Questo significa che, anche se esistono infinite soluzioni ammissibili, per trovare quella ottimale, non è necessario esaminarle tutte, ma è sufficiente limitarsi alle *soluzioni ammissibili di base* (che sono in numero finito), ovvero alle soluzioni che si trovano sui vertici dell'insieme delle soluzioni ammissibili.

Il metodo del *simplesso* permette di valutare il valore della funzione obiettivo nei vertici dell'insieme delle soluzioni ammissibili, come viene spiegato nel paragrafo seguente.

Fig. 8.10



In conclusione:

se la funzione obiettivo ha un valore ottimale finito, tale valore può essere trovato esaminando le soluzioni ammissibili di base e scegliendo quella che presenta il valore ottimale di Z .