

Tabella di riepilogo per le scomposizioni

Come si usa la tabella di riepilogo per le scomposizioni

Premetto che, secondo me, questa tabella e' una delle pochissime cose che in matematica bisognerebbe "studiare a memoria", perchè permette di poter affrontare quasi tutte le possibili scomposizioni di un polinomio fino a sei termini

Vediamo con un semplice esercizio come usare la tabella per scomporre un polinomio:

Scomponiamo il polinomio:

$$a^2x^2 + ax^2 - ax - x =$$

prima operazione da fare e' raccogliere a fattor comune, cioe'

$$=x(a^2x + ax - a - 1) =$$

Ora contiamo i termini in parentesi: sono 4, quindi andiamo a vedere le scomposizioni a quattro termini: abbiamo il cubo di un binomio che non va bene perchè non abbiamo termini al cubo, poi abbiamo il raccoglimento parziale. Proviamo a raccogliere il primo con il terzo ed il secondo con il quarto:

$$=x[a(ax-1)+1(ax-1)] =$$

poiche' dentro parentesi tonde i termini sono uguali possiamo raccogliere

$$x[(ax-1)(a+1)] =$$

Togliamo le parentesi quadre perchè non servono

$$=x(ax-1)(a+1)$$

Per scomporre prima dobbiamo raccogliere a fattor comune totale poi contare il numero di termini che restano dentro parentesi (o fuori se non abbiamo raccolto niente), poi andiamo a controllare le scomposizioni associate a quel numero di termini nell'ordine in cui si presentano (dalla piu' semplice alla piu' difficile) finche' non troviamo quella giusta. Se alla fine vediamo che nessuna scomposizione va bene, dobbiamo scrivere **polinomio non scomponibile**

Proviamo a scomporre il polinomio:

$$x^3 - x^2 + 2x + 1 =$$

Non c'e' niente da raccogliere a fattor comune totale allora contiamo i termini: sono 4

- La prima scomposizione a quattro termini e' il cubo di un binomio, abbiamo due termini al cubo ma mancano i tripli prodotti, quindi non va bene
 - Proviamo il raccoglimento parziale ma vediamo subito che non possiamo farlo perchè abbiamo tre segni positivi ed uno negativo, quindi anche questa scomposizione non va bene
 - Proviamo a raggruppare: sembra quasi ci sia il quadrato di un binomio ma i termini che potrebbero essere quadrati sono uno positivo e l'altro negativo quindi non e' un quadrato e non ci sono altri possibili raggruppamenti, passiamo oltre
 - Proviamo Ruffini: i possibili divisori sono +1 e -1
 $P(1) = (1)^3 - (1)^2 + 2(1) + 1 = 1 - 1 + 2 + 1 = 3$
 $P(1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 2(-1) + 1 = -1 - 1 - 2 + 1 = -3$
e con entrambi il polinomio da' resto diverso da zero quindi anche questa scomposizione e' da scartare
 - il polinomio $x^3 - x^2 + 2x + 1 =$ non e' scomponibile
-

Alla pagina successiva trovate la tabella...

Prima operazione da fare e' il raccoglimento a fattor comune poi si contano i termini	
N. termini	Scomposizioni possibili
2 termini	- Differenza di quadrati: (differenza di potenze pari) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ - Somma di cubi (somma di potenze dispari) $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$ - Differenza di cubi (differenza di potenze dispari) $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$ - Caso particolare: somma di potenze pari
3 termini	- Quadrato del binomio $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ - Trinomio notevole $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$ - Ruffini
4 termini	- Cubo del binomio $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ - Raccoglimento a fattor comune parziale $ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y)$ - Raggruppamento - Ruffini
5 termini	- Raggruppamenti - Ruffini
6 termini	- Quadrato del trinomio $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$ - Raccoglimento parziale $ax + bx + ay + by + az + bz = x(a+b) + y(a+b) + z(a+b) = (a+b)(x+y+z)$ - Raggruppamento - Ruffini

NOZIONI DA RIPASSARE

RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE TOTALE

E' l'operazione contraria della moltiplicazione di un monomio per un polinomio:
cioe' se ad esempio eseguiamo la seguente moltiplicazione

$$3a(2a+5) \text{ otteniamo } 6a^2+15a$$

Il problema e' ora come tornare indietro: cioe' come da

$$6a^2+15a \text{ si puo' passare a } 3a(2a+5)$$

In pratica dobbiamo trovare il monomio che e' contenuto in tutti i termini del polinomio e questo l'abbiamo gia' visto: si chiama

MASSIMO COMUN DIVISORE

Quindi dovremo procedere nel modo seguente:

Consideriamo il polinomio

$$6a^2+15a$$

dobbiamo trovare cosa hanno in comune $6a^2$ e $15a$ cioe' il loro M.C.D

Tra 6 e 15 il M.C.D. vale 3

Tra a^2 e a il M.C.D. vale a

Quindi il M.C.D. vale $3a$

allora scriviamo $6a^2+15a = 3a ($

poi consideriamo il primo termine:

$6a^2$ quante volte contiene $3a$ cioe' quanto fa $6a^2$ diviso $3a$

il risultato e' $2a$

allora scriviamo

$$6a^2+15a = 3a(2a+$$

consideriamo ora il secondo termine

$15a$ diviso $3a$ da' come risultato 5

quindi scriveremo

$$6a^2 + 15a = 3a(2a+5)$$

Per finire verifichiamo che eseguendo la moltiplicazione ritroviamo il polinomio di partenza.

Facciamo un altro esempio:

$$6a^2b^4 - 9ab^3 + 3ab =$$

$$\text{M.C.D.} = 3ab$$

$$6a^2b^4 : 3ab = 2ab^3$$

$$-9ab^3 : 3ab = -3b^2$$

$$+3ab : 3ab = +1$$

$$\text{otteniamo: } 6a^2b^4 - 9ab^3 + 3ab = 3ab(2ab^3 - 3b^2 + 1)$$

Attenzione!

Quando raccogliamo a fattor comune dobbiamo raccogliere TUTTO (cioe' il M.C.D.) senza lasciare nulla di comune.

Ad esempio e' sbagliato fare:

$$a^3 - a^2 = a(a^2 - a)$$

mentre si deve fare

$$a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$$

perche' il M.C.D. e' a^2

INTRODUZIONE AL RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE PARZIALE

Prima di procedere ad eseguire il raccoglimento parziale dobbiamo fare alcuni esercizi
Precisamente dobbiamo provare ad eseguire il raccoglimento totale nel caso che nel polinomio vi siano delle parentesi

Scomponiamo il seguente binomio

$$(2a+3b)x + (2a+3b)y =$$

Ho detto giusto! binomio, infatti non vi fate trarre in inganno dalla lunghezza: i termini dentro parentesi valgono come un solo termine quindi questo binomio e' composto dai due monomi

$(2a+3b)x$ e $(2a+3b)y$ ed e' come se fosse

$$zx + zy =$$

quindi raccogliendo la z

$$zx + zy = z(x+y)$$

allora

$$(2a+3b)x + (2a+3b)y = (2a+3b)(x+y)$$

cioe' raccogliamo tutta la parentesi come se fosse un termine solo

vediamo un altro esempio

$$2x(x+3) + y(x+3) = \text{la parte comune e' } (x+3) \text{ quindi}$$

$$2x(x+3) + y(x+3) = (x+3)(2x+y)$$

esercizio: scomporre

$$4x(x+y) + 2x^2(x+y) =$$

stavolta la parte in comune e' $2x(x+y)$

quindi avremo

$$4x(x+y) + 2x^2(x+y) = 2x(x+y)(2+x)$$

Proviamo qualcosa di piu' complicato

$$4x^2(x+y)^3(x-y) + 2x^2y(x+y)^2(x-y)^3 - 6x^4(x+y)^4(x-y)^4$$

la parte comune e'

$$2x^2(x+y)^2(x-y)$$

$$\text{quindi avremo: } 4x^2(x+y)^3(x-y) + 2x^2y(x+y)^2(x-y)^3 - 6x^4(x+y)^4(x-y)^4 = 2x^2(x+y)^2(x-y)[2(x+y) + y(x-y)^2 - 3x^2(x+y)^2(x-y)^3]$$

Facciamo ora il seguente esercizio

$$ax+ay +b(x+y)=$$

sono 3 termini, ma se raccogliamo fra loro i primi due otteniamo due parentesi uguali

$$ax+ay +b(x+y)= a(x+y)+b(x+y)=$$

ed ora possiamo procedere come prima

$$ax+ay +b(x+y)= a(x+y)+b(x+y)= (a+b)(x+y)$$

quindi se c'e' una parentesi conviene vedere se raccogliendo fra i termini senza parentesi e' possibile avere un'altra parentesi uguale e poi raccogliere le parentesi stesse

RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE PARZIALE

Il raccoglimento a fattor comune parziale si puo' eseguire solamente quando i termini del polinomio sono 4, 6, 8... Il ragionamento da fare e' il seguente:

consideriamo il polinomio

$$ax + bx + ay +by$$

i suoi termini non hanno niente in comune fra tutti ma se li consideriamo due a due allora qualcosa in comune c'e': precisamente i primi due hanno in comune x e gli ultimi due y allora tra i primi due raccolgo la x e tra gli ultimi due la y

$$ax + bx + ay +by = x(a+b) + y(a+b)$$

notiamo che vi sono due termini con le parentesi uguali, quindi possiamo raccogliere tutta la parentesi

$$ax + bx + ay +by = x(a+b) + y(a+b) = (a+b)(x+y)$$

Allora:

Quando abbiamo quattro termini proviamo a raccogliere a due a due: se dentro parentesi vengono termini uguali allora continuiamo e raccogliamo le parentesi, se non vengono uguali proviamo un'altra scomposizione

Naturalmente e' lo stesso se invece di quattro termini ne ho 6

$$ax+bx+ay+by+az+bz = x(a+b)+y(a+b)+z(a+b) = (a+b)(x+y+z)$$

Importante: è indifferente quali termini raccogliamo: nel primo esercizio potevamo raccogliere il primo con il terzo ed il secondo con il quarto

$$ax + bx + ay +by = a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$$

Per semplicita' io consiglio di raccogliere tra loro sempre un positivo con un negativo (naturalmente se i segni sono due positivi e due negativi)

$$ax+ay-bx-by=$$

Raccogliamo ax con -bx e ay con -by

$$ax+ay-bx-by= x(a-b)+y(a-b)= (a-b)(x+y)$$

Ricordate che il segno che mettiamo in mezzo corrisponde sempre a quello del primo termine del secondo raccoglimento. Se fate cosi' non ci dovrebbero essere problemi ma se non lo fate potreste trovarvi con termini dentro parentesi uguali ma di segno contrario

Ricordate allora che quando le parentesi vengono uguali ma di segno contrario possiamo cambiare il segno dentro (per tutti i termini) e fuori parentesi: esempio

$$ax-ay-bx+by= a(x-y)+b(-x+y)= a(x-y)-b(x-y)=(a-b)(x-y)$$

Altra osservazione da fare e' che in una scomposizione di raccoglimento a fattor comune parziale, se abbiamo 4 termini, i segni devono sempre essere in numero pari, cioe' 2 positivi e due negativi, 4 positivi o 4 negativi e mai ad esempio un segno positivo e tre negativi

Differenza di quadrati

Prendiamo il prodotto notevole somma di due monomi per la loro differenza:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Se lo scriviamo a rovescio otteniamo una scomposizione:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Cioe' se ho il segno meno fra i quadrati di due oggetti posso scomporre come il prodotto fra la somma dei due oggetti e la loro differenza

Come esempio scomponiamo:

$$9x^2-4y^2=$$

$9x^2$ e' il quadrato di $3x$

$4y^2$ e' il quadrato di $2y$

in mezzo c'e' il segno meno quindi faccio il prodotto fra la somma e la differenza $(3x + 2y) \cdot (3x - 2y)$

In definitiva la scomposizione e'

$$9x^2-4y^2=(3x+2y)(3x-2y)$$

Regola: La differenza fra i quadrati di due monomi si scompone moltiplicando la somma dei due monomi per la loro differenza

Somma di potenze dispari

Cercheremo la regola per scomporre tutte quelle potenze del tipo

$x^n + a^n$ per n dispari, cioe' ad esempio

$$x^3 + a^3 =$$

$$x^5 + a^5 =$$

$$x^7 + a^7 =$$

.....

dove al posto di a possiamo pensare un numero; per trovare la regola di scomposizione proviamo a scomporre con Ruffini e vediamo se riusciamo ad individuare delle regolarita' come nella schermata precedente

Iniziamo a scomporre

$$x^3 + a^3 =$$

essendo il termine noto a^3 il possibile divisore di Ruffini sara' del tipo $(x-a)$; $(x+a)$

Provo a dividere per $(x-a)$

$$(x-a) ; P(a)=a^3+a^3 \neq 0$$

$$(x+a) ; P(-a)=(-a)^3+a^3=-a^3+a^3=0$$

Essendo il resto zero $(x+a)$ e' un divisore;

eseguo la divisione

	1	0	0	a^3
$-a$		$-a$	a^2	$-a^3$
	1	$-a$	a^2	$=$

ottengo

$$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$$

Proviamo ora a scomporre

$$x^5 + a^5 =$$

$$(x-a) ; P(a)=a^5 + a^5 \neq 0$$

$$(x+a) ; P(-a)=(-a)^5 + a^5 = -a^5 + a^5 = 0$$

Essendo il resto zero $(x+a)$ e' un divisore;

eseguo la divisione

	1	0	0	0	0	a^5
$-a$		$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	$-a^5$
	1	$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	

ottengo

$$x^5 + a^5 = (x+a) (x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)$$

Ora senza eseguire Ruffini ma tenendo presenti le due scomposizioni

$$x^3 + a^3 = (x+a) (x^2-ax+a^2)$$

$$x^5 + a^5 = (x+a) (x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)$$

Voglio scomporre

$$x^7 + a^7 = \text{Intanto il divisore sara' } (x+a)$$

$$x^7 + a^7 = (x+a) (.....)$$

osserviamo che dentro parentesi al posto dei puntini devo mettere il primo termine abbassato di un grado, cioe' x^6 poi man mano devo creare un polinomio ordinato abbassando la potenza della X ed aumentando la potenza della a ed i segni sono alternati: uno positivo e l'altro negativo ..

quindi

$$x^7 + a^7 = (x+a) (x^6 - ax^5 + a^2x^4 - a^3x^3 + a^4x^2 - a^5x + a^6)$$

Regola: una somma di potenze dispari e' uguale al prodotto di un binomio dato dalla somma delle basi per un polinomio ordinato e completo ottenuto abbassando di un grado il primo termine, poi via via abbassando di un grado il primo ed aumentando di un grado il secondo ed i segni sono alternati

Differenza di potenze dispari

Cercheremo la regola per scomporre tutte quelle potenze del tipo

$x^n - a^n$ per n dispari, cioè ad esempio

$$x^3 - a^3 =$$

$$x^5 - a^5 =$$

$$x^7 - a^7 =$$

.....

dove al posto di a possiamo pensare un numero; per trovare la regola di scomposizione proviamo a scomporre con Ruffini e vediamo se riusciamo ad individuare delle regolarità

Iniziamo a scomporre

$$x^3 - a^3 =$$

essendo il termine noto a^3 il possibile divisore di Ruffini sarà del tipo $(x-a)$; $(x+a)$

Provo a dividere per $(x-a)$

$$(x-a) ; P(a)=a^3 - a^3 = 0$$

Essendo il resto zero $(x-a)$ è un divisore; eseguo la divisione

	1	0	0	$-a^3$
a		a	a^2	a^3
	1	a	a^2	$=$

ottengo

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$$

Proviamo ora a scomporre

$$x^5 - a^5 =$$

$$(x-a) ; P(a)=a^5 - a^5 = 0$$

Essendo il resto zero $(x-a)$ è un divisore; eseguo la divisione

	1	0	0	0	0	$-a^5$
a		a	a^2	a^3	a^4	a^5
	1	a	a^2	a^3	a^4	$=$

ottengo

$$x^5 - a^5 = (x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)$$

Ora senza eseguire Ruffini ma tenendo presenti le due scomposizioni

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$$

$$x^5 - a^5 = (x-a) (x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$$

Voglio scomporre

$$x^7 - a^7 = \text{Intanto il divisore sara' } (x-a)$$

$$x^7 - a^7 = (x-a) (\dots)$$

osserviamo che dentro parentesi al posto dei puntini devo mettere il primo termine

abbassato di un grado, cioe' x^6 poi man mano devo fare un polinomio ordinato

abbassando la potenza della x ed aumentando la potenza della a ed i segni sono tutti positivi

quindi

$$x^7 - a^7 = (x-a) (x^6 + ax^5 + a^2x^4 + a^3x^3 + a^4x^2 + a^5x + a^6)$$

Regola: una differenza di potenze dispari e' uguale al prodotto di un binomio dato dalla differenza delle basi per un polinomio ordinato e completo ottenuto abbassando di un grado il primo termine, poi via via abbassando di un grado il primo ed aumentando di un grado il secondo ed i segni sono tutti positivi

Scomposizione di una somma di potenze pari

In genere una somma di potenze pari del tipo

$$x^4 + a^4$$

Non e' scomponibile

Vi e' un caso in cui e' possibile applicare una scomposizione, ma di solito si fa solo al liceo scientifico:

Per poter fare questa scomposizione occorre che i quadrati dei monomi siano tali che il doppio prodotto dei monomi stessi sia ancora un quadrato; vediamone un esempio:

$$x^4 + 4a^4 =$$

$$x^4 + 4a^4 + 4a^2x^2 - 4a^2x^2 =$$

Ho aggiunto e tolto il doppio prodotto

$$= (x^4 + 4a^2x^2 + 4a^4) - 4a^2x^2 =$$

Ho messo assieme i termini che formano un quadrato ed ora lo evidenzio

$$= (x^2 + 2a^2)^2 - 4a^2x^2 =$$

Ora e' come se avessi due termini al quadrato con il meno in mezzo

applico la scomposizione differenza di quadrati

$$(x^2 + 2a^2)^2 \text{ e' il quadrato di } (x^2 + 2a^2)$$

$$4a^2x^2 \text{ e' il quadrato di } 2ax$$

quindi

$$= [(x^2 + 2a^2) + 2ax] [(x^2 + 2a^2) - 2ax] =$$

faccio cadere le parentesi

$$= (x^2 + 2a^2 + 2ax)(x^2 + 2a^2 - 2ax) =$$

metto i polinomi in forma ordinata

$$= (x^2 + 2ax + 2a^2)(x^2 - 2ax + 2a^2)$$

Ho potuto fare la scomposizione solamente perché il termine che ho aggiunto e tolto $4a^2x^2$ è un quadrato, altrimenti non avrei potuto scomporre

Scomposizione secondo il quadrato del binomio

Scriviamo la formula del quadrato del binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

se la scriviamo a rovescio otterremo una scomposizione

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

Significa che se ho un polinomio di **tre termini** devo guardare se due termini sono dei quadrati di monomi e, nel caso lo siano, se corrisponde il doppio prodotto dei due monomi, in tal caso posso scomporre come

$$(\text{primo monomio} + \text{secondo monomio})^2$$

ad esempio scomponiamo

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 =$$

$4a^2$ è il quadrato di $2a$

$9b^2$ è il quadrato di $3b$

se faccio il doppio prodotto dei due monomi

$2 \cdot 2a \cdot 3b$ ottengo $12ab$ che mi corrisponde al termine che è restato

quindi posso scrivere

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$$

Attenzione al segno da mettere in mezzo: se il termine che corrisponde al doppio prodotto è positivo in mezzo dovremo mettere il $+$ se invece è negativo dovremo mettere il segno $-$

Esempio $4x^2 - 16xy + 16y^2$

$4x^2$ è il quadrato di $2x$

$16y^2$ è il quadrato di $4y$

il doppio prodotto è

$$2 \cdot 2x \cdot 4y = 16xy$$

Il segno in mezzo è $-$ perché nel polinomio di partenza $-16xy$ ha il segno meno; quindi

$$4x^2 - 16xy + 16y^2 = (2x - 4y)^2$$

Scomposizione secondo il trinomio notevole

La scomposizione secondo il trinomio notevole e' l'operazione inversa della moltiplicazione fra binomi: cioe' dato il trinomio x^2+sx+p con s e p numeri dati dobbiamo trovare il prodotto fra binomi $(x+a)(x+b)$ il cui risultato sia il polinomio di partenza. Se proviamo ad eseguire la moltiplicazione vedremo cosa sono s e p rispetto ad a e b

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

allora avremo che $x^2+sx+p=x^2+(a+b)x+ab$ e per il principio di identita' dei polinomi avremo

$$s=(a+b)$$

$$p=ab$$

Quindi avendo p e s dovro' trovare due numeri il cui prodotto e' p e la somma e' s
Esempio

$$x^2+5x+6=$$

Devo trovare due numeri il cui prodotto e' 6 e la somma e' 5 (conviene partire dal prodotto): i numeri che danno prodotto 6 possono essere 1 e 6 oppure 2 e 3 e la somma di 2 e 3 mi da' 5

i due numeri cercati sono 2 e 3 quindi

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

Quindi quando abbiamo un polinomio ordinato di 3 termini possiamo usare questa regola senza scomodare Ruffini.

Attenzione: per somma si intende somma algebrica quindi e' importante guardare il segno del prodotto: se e' positivo allora i due numeri cercati hanno lo stesso segno e dobbiamo farne la somma, ma se il segno del prodotto e' negativo i due numeri hanno segni diversi e dobbiamo fare la differenza;

esempio

$$x^2+3x-10=$$

Devo trovare due numeri il cui prodotto e' -10 e la somma e' $+3$ (conviene partire dal prodotto che in questo caso e' negativo quindi dobbiamo fare la differenza):

i numeri che danno prodotto 10 possono essere 1 e 10 oppure 2 e 5 e la differenza di 5 e 2 mi da' 3 ed essendo 3 positivo dovro' fare $+5-2$

i due numeri cercati sono -2 e $+5$ quindi

$$x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$$

SCOMPOSIZIONE DI RUFFINI

E' una scomposizione che si puo' sempre applicare a tutti i polinomi ordinati scomponibili, su cui non sia possibile operare il raccoglimento a fattor comune totale. Ha pero' il difetto di essere lunga e complicata, quindi, quando possibile, cercheremo delle abbreviazioni.

La regola, però, fornisce un metodo generale per operare sempre la scomposizione sui polinomi ordinati, se cio' non e' possibile diremo che il polinomio non e' scomponibile. Partiamo da un polinomio molto semplice, ad esempio consideriamo

$$x^2+5x+6$$

il problema che ci poniamo e' trovare due polinomi che moltiplicati diano come risultato il polinomio di partenza.

Si pensa che il polinomio abbia come fattore un fattore del tipo $(x-a)$ in cui a e' un numero

Quindi possibili fattori potranno essere:

$$(x-1)$$

$$(x+1)$$

$$(x-2)$$

$$(x+2)$$

$$(x-3)$$

$$(x+3)$$

.....

Si tratta di vedere se questi sono effettivamente fattori oppure no. Ricordando che un termine e' fattore di un secondo termine se il primo divide esattamente il secondo (cioe' il resto della divisione vale 0) dovremo fare

$(x^2+5x+6):(x-1)$ e calcolarne il resto. se viene 0 e' un fattore altrimenti proveremo

$(x^2+5x+6):(x+1)$ poi

$(x^2+5x+6):(x-2)$ finche' non troviamo il resto 0

Ricordiamo che per trovare il resto possiamo applicare il teorema di Ruffini quindi troviamo i possibili resti

Troviamo il resto dividendo (x^2+5x+6) per $(x-1)$

$(x-1)$; $P(1)=1^2+5(1)+6=1+5+6=12$ diverso da 0

proviamo ora

$(x+1)$; $P(-1)=(-1)^2+5(-1)+6=1-5+6=2$ diverso da 0

$(x-2)$; $P(2)=2^2+5(2)+6=4+10+6=20$ diverso da 0

$(x+2)$; $P(-2)=(-2)^2+5(-2)+6=4-10+6=0$ allora $(x+2)$ e' un fattore

Quindi potremo scrivere

$$(x^2+5x+6) = (x+2) \cdot (\text{qualcosa})$$

Per trovare cos'e' quel qualcosa facciamo il seguente ragionamento:

4e' un fattore di 20 ed io posso scrivere $20 = 4 \cdot (\text{qualcosa})$ quanto vale quel qualcosa? 5 ;

e come ho fatto ad ottenerlo? Evidentemente facendo $20:4$

Facciamo quindi nello stesso modo: per trovare l'altro fattore eseguiamo

$(x^2+5x+6):(x+2) =$ e naturalmente utilizziamo la divisione di Ruffini

	1	5	6
-2		-2	-6
	1	3	0

quindi $(x^2+5x+6) = (x+2)(x+3)$

Proviamo un'altra scomposizione:

$$x^3-x^2-5x-3 =$$

Proviamo se il resto e' nullo quando dividiamo per $x-1$

$$(x-1): P(1) = (1)^3-(1)^2-5(1)-3 = 1-1-5-3 = -8 \text{ diverso da zero}$$

proviamo ora per $x+1$

$$(x+1): P(-1) = (-1)^3-(-1)^2-5(-1)-3 = -1-1+5-3 = 0 \text{ questo e' un divisore, quindi scrivo}$$

$$x^3-x^2-5x-3 = (x+1) \cdot \text{qualcosa}$$

Per trovare cosa devo mettere al posto di **qualcosa** faccio la divisione di Ruffini

	1	-1	-5	-3
-1		-1	+2	+3
	1	-2	-3	0

quindi ottengo

$$x^3-x^2-5x-3=(x+1) \cdot (x^2-2x-3)$$

non e' finita: devo ancora scomporre la parte fra parentesi (x^2-2x-3) perche' e' di grado superiore al primo

Ricomincio con Ruffini ma non provo $x-1$ perche' se non andava bene per tutto il polinomio non andra' bene nemmeno per una sua parte; quindi ricomincio dall'ultimo che mi ha dato il risultato giusto, perche' un fattore puo' essere ripetuto:esempio $12=2 \times 2 \times 3$

$$(x+1): P(-1) = (-1)^2-2(-1)-3=1+2-3=0 \text{ questo e' un divisore, quindi scrivo}$$

$$x^3-x^2-5x-3=(x+1) \cdot (x^2-2x-3)=(x+1) \cdot (x+1) \cdot \text{qualcosa}$$

Rifaccio la divisione

	1	-2	-3
-1		-1	3
	1	-3	0

quindi

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1) \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-3)$$

Uno degli errori più comuni facendo la divisione è scrivere: $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1) \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x+1) \cdot (x-3)$

Sarebbe come scrivere $12 = 2 \times 6 = 2 \times 3$; è un errore perché 2×3 non è uguale a 12

cioè facendo la moltiplicazione l'ultimo termine deve sempre tornare uguale al primo, quindi devo sempre ripetere tutti i fattori

Avete visto che la divisione è un'operazione piuttosto difficile da fare, allora cerchiamo qualche "trucco" per poter abbreviare qualcosa:

trucco 1: Limitare il numero dei fattori

Prima di tutto notiamo che nelle scomposizioni già fatte:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-3)$$

il termine senza la lettera del polinomio di partenza è il prodotto dei termini noti dei fattori cioè:

$$\text{nel primo } 6 = 2 \cdot 3$$

$$\text{nel secondo } -3 = 1 \cdot 1 \cdot (-3)$$

ma allora se devo ad esempio scomporre $x^2 - 10x + 21$

21 sarà il prodotto dei termini noti dei binomi che mi scompongono il polinomio quindi non dovrò provare tutti i fattori ma solamente

$$P(1) \ P(-1) \ P(3) \ P(-3) \ P(7) \ P(-7) \ P(21) \ P(-21)$$

Sarà inutile provare ad esempio $P(2)$ perché moltiplicando 2 per un intero non posso avere come risultato 21

trucco 2: mettere i segni giusti

È da applicare ai segni quando vado a calcolare $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$ ecc

Se vado a calcolare $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$.. i segni dei termini non cambieranno perché il numero che sostituisco al posto della x è positivo, quindi dove c'è più resta più e dove c'è meno resta meno

Se invece vado a calcolare $P(-1)$, $P(-2)$, $P(-3)$, $P(-4)$.. resteranno uguali i segni dei termini a potenza pari mentre cambieranno i segni per le potenze dispari

ora bisogna trattare quelli che io chiamo i casi patologici.

Casi particolari

I casi particolari che tratteremo sono

- polinomio non completo
- polinomio scomponibile mediante termini frazionari
- polinomio letterale
- scomposizione con binomio di grado superiore ad uno

Caso del polinomio non completo

Succede abbastanza spesso che il polinomio non sia completo, cioè che manchino dei termini. Ad esempio proviamo a scomporre:

$$x^3 - 2x + 1$$

provo

$$(x-1); P(1)=(1)^3-2(1)+1=1-2+1=0$$

quindi $(x-1)$ è un divisore, però posso fare la divisione di Ruffini solo se ci sono tutti i termini ed allora siccome mi manca x^2 al suo posto dovrò mettere uno zero cioè

$$x^3 + 0x^2 - 2x + 1$$

ed ora procedo nel solito modo:

	1	0	-2	1
1		1	1	-1
	1	1	-1	0

quindi

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$$

Ora si dovrebbe scomporre $x^2 + x - 1$

provo

$$(x-1); P(1)=(1)^2+(1)-1=1+1-1 \neq 0$$

$$(x+1); P(-1)=(-1)^2+(-1)-1=1-1-1 \neq 0$$

e poiché i divisori del termine noto sono solamente $+1$, -1 il polinomio non è ulteriormente scomponibile. Risultato finale:

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$$

Per esercizio provate a scomporre

$$x^5 - 32 =$$

ricordando che per ordinare dovreste scrivere

$$x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 32 =$$

Caso del polinomio scomponibile con termini frazionari

Quando cerchiamo i possibili divisori puo' succedere che troviamo dei valori frazionari ad esempio proviamo a scomporre:

$$6x^2 - 5x + 1$$

Trovo i divisori di Ruffini

i divisori del termine noto sono $+1, -1$

i divisori del primo coefficiente sono $+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$

I divisori possibili li ottengo facendo i divisori del termine noto fratto i divisori del primo coefficiente, quindi ottengo

$+1, -1, +1/2, -1/2, +1/3, -1/3, +1/6, -1/6$

$$(x-1); P(1) = 6(1)^2 - 5(1) + 1 = 6 - 5 + 1 \neq 0$$

$$(x+1); P(-1) = 6(-1)^2 - 5(-1) + 1 = 6 + 5 + 1 \neq 0$$

$$(x-1/2); P(1/2) = 6(1/2)^2 - 5(1/2) + 1 = 6/4 - 5/2 + 1 =$$

$$6 - 10 + 4$$

$$= \frac{\quad}{4} = 0$$

4

quindi $(x-1/2)$ e' un divisore,

	6	-5	1
$\frac{1}{2}$		3	-1
	6	-2	0

quindi

$$6x^2 - 5x + 1 = (x - 1/2)(6x - 2)$$

siccome 2 diviso 6 fa 1/3 potrei anche scrivere raccogliendo 6

$$6x^2 - 5x + 1 = 6(x - 1/2)(x - 1/3)$$

o meglio ancora dividendo il 6 in 2·3 e moltiplicando il primo fattore per 2 ed il secondo per 3 in modo da non avere frazioni

$$6x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)(3x - 1)$$

Per esercizio provate a scomporre

$$20x^3 - 4x^2 - 5x + 1 =$$

Caso del polinomio a coefficienti letterali

Quando i coefficienti sono dei termini letterali si procede sempre nello stesso modo, ma con molta attenzione

ad esempio proviamo a scomporre:

$$x^3 - 3b^2x^2 + b^4x + b^6$$

Trovo i divisori di Ruffini

i divisori del termine noto sono

$$+1, -1, +b, -b, +b^2, -b^2, +b^3, -b^3, +b^4, -b^4, +b^5, -b^5, +b^6, -b^6$$

provo i divisori

$$(x-1); P(1) = 1^3 - 3b^2(1)^2 + b^4(1) + b^6 = 1 - 3b^2 + b^4 + b^6 \neq 0$$

$$(x+1); P(-1) = (-1)^3 - 3b^2(-1)^2 + b^4(-1) + b^6 = -1 - 3b^2 - b^4 + b^6 \neq 0$$

$$(x-b); P(b) = b^3 - 3b^2(b)^2 + b^4(b) + b^6 = b^3 - 3b^4 + b^5 + b^6 \neq 0$$

$$(x+b); P(-b) = (-b)^3 - 3b^2(-b)^2 + b^4(-b) + b^6 = -b^3 - 3b^4 - b^5 + b^6 \neq 0$$

$$(x-b^2); P(b) = (b^2)^3 - 3b^2(b^2)^2 + b^4(b^2) + b^6 = b^6 - 3b^6 + b^6 + b^6 = 0$$

quindi $(x - b^2)$ e' un divisore,

	1	$-3b^2$	b^4	b^6
b^2		b^2	$-2b^4$	$-b^6$
	1	$-2b^2$	$-b^4$	0

quindi

$$x^3 - 3b^2x^2 + b^4x + b^6 = (x-b^2)(x^2 - 2b^2x - b^4)$$

adesso devo vedere se posso scomporre

$$x^2 - 2b^2x - b^4$$

i possibili divisori sono

$$+1, -1, +b, -b, +b^2, -b^2, +b^3, -b^3, +b^4, -b^4$$

però $+1, -1, +b, -b$ li abbiamo già provati;

quindi ripartiamo da b^2

$$(x-b^2); P(b^2) = (b^2)^2 - 2b^2(b^2) - b^4 = b^4 - 2b^4 - b^4 \neq 0$$

$$(x+b^2); P(-b^2) = (-b^2)^2 - 2b^2(-b^2) - b^4 = b^4 + 2b^4 - b^4 \neq 0$$

$$(x-b^3); P(b^3) = (b^3)^2 - 2b^2(b^3) - b^4 = b^6 - 2b^5 - b^4 \neq 0$$

$$(x+b^3); P(-b^3) = (-b^3)^2 - 2b^2(-b^3) - b^4 = b^6 + 2b^5 - b^4 \neq 0$$

$$(x-b^4); P(b^4) = (b^4)^2 - 2b^2(b^4) - b^4 = b^8 - 2b^6 - b^4 \neq 0$$

$$(x+b^4); P(-b^4) = (-b^4)^2 - 2b^2(-b^4) - b^4 = b^8 + 2b^6 - b^4 \neq 0$$

quindi il polinomio non e' piu' scomponibile e il risultato della scomposizione e'

$$x^3 - 3b^2x^2 + b^4x + b^6 = (x-b^2)(x^2 - 2b^2x - b^4)$$

Per esercizio provate a scomporre

$$x^2 - (a+2b)x + 2ab =$$

notando che $-(a+2b)$ e' un unico coefficiente

Scomposizione di Ruffini con binomi di grado superiore ad uno

La faremo quando i termini componenti hanno i gradi multipli secondo un numero intero: ad esempio 9,6,3,0 oppure 4,2,0 Vediamo su un esempio come procedere

$$x^6 - 5x^3 + 6 =$$

Trovo i divisori di Ruffini

i divisori del termine noto sono

$$+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$$

considero come lettera non x ma x^3 , quindi posso considerare il polinomio come

$$(x^3)^2 - 5x^3 + 6 =$$

se trovi difficolta' pensa di mettere al posto di x^3 una y , ottieni

$$y^2 - 5y + 6 =$$

e procedi normalmente, alla fine, nel risultato al posto di y metterai x^3

provo i divisori: sostituisco il numero al posto di x^3 , quindi attenti a non fare confusione con gli esponenti

$$(x^3-1); P(1) = 1^2 - 5(1) + 6 = 1 - 5 + 6 \neq 0$$

quindi $(x^3 - 2)$ e' un divisore,

	1	-5	6
2		2	-6
	1	-3	0

Adesso dovete fare attenzione per ricostruire il quoziente: partendo dal termine noto avete termine noto, x^3 , x^6 , x^9 , ...

noi abbiamo solo due termini quindi termine noto ed x^3

$$x^6 - 5x^3 + 6 = (x^3 - 2)(x^3 - 3)$$

Scomposizione secondo il cubo del binomio

E' la piu' complicata da calcolare

Scriviamo la formula per il cubo del binomio $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Se la leggiamo a rovescio otterremo una scomposizione

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

La prima cosa da osservare e' che si puo' fare quando abbiamo un polinomio di **4**

termini; osserviamo anche che ci devono essere due termini che siano dei cubi ed inoltre i segni devono essere in numero pari, cioe' quattro segni positivi oppure due positivi e due negativi, oppure quattro segni negativi

Io consiglio di considerare i due termini di cui ci sono i cubi e provare ad eseguire con loro il cubo del binomio: se corrisponde al quadrinomio di partenza e' il cubo e posso scomporre come

$$(\text{primo monomio} + \text{secondo monomio})^3$$

altrimenti si prova un'altra scomposizione

Esempio: proviamo scomporre

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 =$$

E' un polinomio di quattro termini e vi sono due cubi:

$8x^3$ e' il cubo di $2x$

$27y^3$ e' il cubo di $3y$

Quindi proviamo a calcolare

$(2x+3y)^3$ Ho messo il piu' perche' i termini sono tutti positivi, se avessi avuto due positivi e due negativi avrei provato col segno meno)

Se il risultato corrispondera' al polinomio di partenza questa sara' la scomposizione, altrimenti dovremo provare un'altra scomposizione (ad esempio Ruffini)

Se sviluppo ottengo

$$(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

Va bene. Quindi potro' scrivere:

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x+3y)^3$$

Per i segni notiamo che se e' un cubo i segni sono o tutti e quattro positivi (o negativi) oppure due positivi e due negativi, quindi, se avessi

$$8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3$$

questo non potrebbe essere un cubo

Raggruppamenti possibili per polinomi a quattro termini

Il caso classico del raggruppamento a quattro termini e' quello in cui tre termini concorrono in un quadrato ed il quarto e' ancora un quadrato:

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 =$$

Raggruppo i primi tre termini

$$= (x^2 + 2xy + y^2) - z^2 =$$

$$= (x + y)^2 - z^2 =$$

Ora poiche' la parentesi e' un solo termine devo fare la scomposizione fra due termini e precisamente posso fare la differenza di due quadrati cioe':

$$= [(x + y) + z][(x + y) - z] =$$

tolgo le parentesi interne

$$= (x + y + z)(x + y - z)$$

Un altro caso possibile e' quello in cui abbiamo una differenza di quadrati che si combina con un raccoglimento:

$$x^2 - a^2 + 5x + 5a =$$

Scompongo i primi due termini come differenza di quadrati e fra il terzo ed il quarto termine raccolgo il 5

$$= (x + a)(x - a) + 5(x + a) =$$

ora sono due termini e tra loro posso raccogliere $(x + a)$

$$= (x + a)[(x - a) + 5] = (x + a)(x - a + 5)$$

Altri casi possibili si hanno con somme o differenze di potenze dispari unite ad un raccoglimento

Scomposizione secondo il quadrato del trinomio

E' una delle piu' facili da individuare perche' il polinomio di partenza ha un elevato numero di termini (sei), l'unica difficolta' e' mettere i segni giusti.

Naturalmente si ottiene leggendo a rovescio la regola per ottenere il quadrato del trinomio

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

cioe'

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$$

Proviamo subito con un esempio:

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 16xz - 24yz =$$

Guardando la regola del quadrato del trinomio devo avere sei termini di cui tre devono essere dei quadrati di monomi e gli altri tre i loro doppi prodotti (qui sono in fila ma possono anche essere in disordine)

$4x^2$ e' il quadrato di $2x$

$9y^2$ e' il quadrato di $3y$

$16z^2$ e' il quadrato di $4z$

Il doppio prodotto di $2x$ e di $3y$ e' $2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$

Il doppio prodotto di $2x$ e di $4z$ e' $2 \cdot 2x \cdot 4z = 16xz$

Il doppio prodotto di $3y$ e di $4z$ e' $2 \cdot 3y \cdot 4z = 24yz$

quindi posso scrivere

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 16xz - 24yz = (2x \quad 3y \quad 4z)^2$$

Per quanto riguarda i segni partiamo dal mettere il segno positivo al primo monomio, per avere il segno del secondo guardo il segno del doppio prodotto del primo per il secondo: se c'e' piu' metto al secondo il segno piu' altrimenti metto meno,

in questo caso avendo $+12xy$ metto piu'. $(2x + 3y \quad 4z)^2$.

Per il segno del terzo guardo il doppio prodotto fra il primo ed il terzo:

avendo $-16xz$ metto meno: $(2x + 3y - 4z)^2$.

Non e' finita: devo controllare che vada bene il segno del doppio prodotto fra il secondo ed il terzo altrimenti la scomposizione non e' valida:

in questo caso $-24yz$ corrisponde al segno positivo del secondo e negativo del terzo quindi

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 16xz - 24yz = (2x + 3y - 4z)^2$$

Alcuni raggruppamenti possibili per polinomi a cinque termini

Abbiamo vari casi e bisogna decidere volta per volta cosa fare,

Enumeriamo alcuni dei vari casi possibili per avere un'idea su come procedere:

- Differenza fra due cubi
- Quadrato di un binomio e raccoglimento
- Trinomio notevole con raccoglimento

Inoltre posso avere somme o differenze di potenze dispari o differenze di potenze pari unite ad una scomposizione a tre termini, quindi i casi diventano piuttosto numerosi e invece di studiarli a memoria conviene cercare di capire volta per volta quale strada seguire. Poiche' questi raggruppamenti sono piuttosto complicati vengono usati raramente, quindi faremo dei brevi cenni e non considereremo il caso in cui uno dei raggruppamenti sia scomponibile con Ruffini

Raggruppamento per polinomi a cinque termini: differenza di cubi

In questo caso quattro dei termini concorrono a formare un cubo di un binomio ed il quinto termine e' ancora un cubo

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - z^3 =$$

Raggruppo i primi quattro termini

$$= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - z^3 =$$

$$= (x+y)^3 - z^3 =$$

Ora poiche' la parentesi e' da considerare un solo termine devo fare la scomposizione fra due termini e precisamente posso fare la differenza di due cubi cioe':

$$= [(x + y) - z][(x + y)^2 + (x + y)z + z^2] =$$

faccio i calcoli

$$= [(x + y) - z][(x^2 + 2xy + y^2) + xz + yz + z^2] =$$

tolgo le parentesi interne

$$= (x + y - z)(x^2 + 2xy + y^2 + xz + yz + z^2)$$

Complicato, vero?

Raggruppamento per polinomi a cinque termini: quadrato di un binomio e raccoglimento

In questo caso tre termini concorrono in un quadrato e tra gli altri due termini posso mettere qualcosa in evidenza in modo che risultino uguali i termini entro parentesi

$$x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y =$$

Raggruppo i primi tre termini e fra il quarto ed il quinto raccolgo 3

$$= (x^2 + 2xy + y^2) + 3(x + y) =$$

$$= (x + y)^2 + 3(x + y) =$$

Ora poiche' i termini entro parentesi sono uguali posso raccogliere:

$$= (x + y)[(x + y) + 3] =$$

tolgo le parentesi interne

$$= (x + y)(x + y + 3)$$

Raggruppamento per polinomi a cinque termini: trinomio notevole con raccoglimento

In questo caso tre termini concorrono in un trinomio notevole e tra gli altri due termini posso mettere qualcosa in evidenza in modo che risultino uguali i termini entro parentesi

$$x^2 + 6x + 8 + ax + 4a =$$

Raggruppo i primi tre termini e fra il quarto ed il quinto raccolgo a

$$=(x^2 + 6x+8) + a(x+4)=$$

nei primi tre termini scompongo secondo il trinomio notevole

$$=(x+2)(x+4)+a(x+4) =$$

Ora poiche' i termini entro parentesi sono uguali posso raccogliere:

$$= (x+4)[(x+2)+a]=$$

tolgo le parentesi interne ed ordino

$$=(x+4)(x+a+2)$$

Raggruppamenti possibili per polinomi a sei termini

In questo caso i raggruppamenti possibili sono ancor piu' numerosi: per averne un'idea pensiamo a tutte le scomposizioni fatte tali che il numero dei termini di due scomposizioni sia 6 e tali che i termini delle due scomposizioni non si possano sommare tra loro; quindi:

- differenza fra due quadrati di un binomio
- cubo di un binomio con un raccoglimento fra due termini
- due termini come differenza di quadrati e gli altri con un raccoglimento parziale
- quattro termini come raggruppamento a differenza di quadrati e gli altri due come raccoglimento

E ve ne sono parecchie altre, se consideriamo per due termini la somma o la differenza di potenze dispari e la differenza di potenze pari.

TEOREMA DEL RESTO DI RUFFINI

Quando e' possibile eseguire la divisione con il metodo di Ruffini e' anche possibile riuscire a trovare il resto senza fare la divisione

Vediamo prima perche' si puo' fare cosi' poi, come conseguenza, vedremo il come.

Consideriamo ad esempio il numero 25, esso diviso per 6 da' per quoziente 4 e resto 1

Come scriverlo?

$$25 = 6 \times 4 + 1$$

Cioe' il numero e' uguale al divisore per il quoziente piu' il resto

Essendo i polinomi un ampliamento dei numeri anche per essi potro' scrivere:

$$\text{DIVIDENDO} = \text{DIVISORE} \times \text{QUOZIENTE} + \text{RESTO}$$

Allora poniamo:

$$\text{POLINOMIO} = P(x)$$

$$\text{DIVISORE (di Ruffini)} = (x-a)$$

$$\text{QUOZIENTE} = Q(x)$$

RESTO = R

Avremo

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R$$

Ora il nostro problema e' trovare il resto cioe' lasciare la **R** da sola dopo l'uguale e questo si puo' fare se si elimina il termine $(x-a) \cdot Q(x)$

Per eliminare questo termine basta mettere a al posto di X il valore **a**, cosi' $(a-a)$ vale zero e

$$Q(x) \cdot (a-a) = Q(x) \cdot (0) = 0$$

Quindi resta:

$$P(a) = (a-a) \cdot Q(a) + R \text{ cioe'}$$

$$P(a) = R$$

Regola: per ottenere il resto basta sostituire nel polinomio al posto della lettera il termine noto del divisore cambiato di segno

Ad esempio calcoliamo il resto di una divisione fatta nelle pagine precedenti:

$$(2x^2+5x+6):(x+2)$$

Bastera' sostituire **(-2)** al posto della X nel polinomio $2x^2+5x+6$

$$2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 8 - 10 + 6 = 4$$

Quindi $R=4$ e' il valore del resto

POLINOMIO ORDINATO

Consideriamo i 2 polinomi

1) a^3+b^3+c+ab

2) $4a^3+6a^2+4a+5$

osserviamo i gradi dei monomi rispetto alla lettera **a**

nel primo polinomio sono **3 0 0 1**

nel secondo polinomio sono **3 2 1 0**

il secondo polinomio dove i gradi sono in fila viene detto **polinomio ordinato secondo la lettera a**

esempi:

$$a^3+a^2+ab+b$$

il polinomio e' ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera a

$$a^3+2a^2b+5ab^2+6b^3$$

il polinomio e' ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera a e secondo le potenze crescenti della lettera b

$$a+ab+5b^2+b^3-5b^4$$

il polinomio e' ordinato secondo le potenze crescenti della lettera b

attenzione: talvolta un polinomio può essere ordinato senza sembrarlo; esempio:

$$a^3+a+1$$

non sembra ordinato ma se lo scrivo:

$$a^3+0a^2+a+1$$

(tanto lo 0 non cambia niente) allora è ordinato
anche il polinomio

$$1+a+ab^2+a^3+a^3bc$$

non sembra ordinato, ma se lo scrivo

$$1a^0+a(1+b^2)+0a^2+a^3(1+bc)$$

allora diventa ordinato secondo le potenze crescenti della lettera a

Per esercizio provate ad ordinarlo secondo le potenze crescenti della lettera b
ordinatelo, infine, rispetto alla lettera c