Si ricorda:

- L'oggetto della logica sono le proposizioni, o enunciati (i due termini sono sinonimi);
- **Una proposizione** è una espressione dotata di senso compiuto alla quale si può attribuire in modo univoco, un unico valore di verità tra i due possibili;
- **I predicati** sono enunciati aperti, perché contengono dei "buchi", che se "riempiti" con una sostituzione, rendono i predicati proposizioni.

Proposizioni

1) Tra le seguenti frasi riconoscere le proposizioni, e stabilirne poi il valore di verità:

- a: Vai a casa!
- b: Il triangolo isoscele è un quadrilatero;
- c: Correre scalzi è bello;
- d: I giovani sotto i 30 anni sono intelligenti;
- e: 7 è un numero dispari;
- f: -3 è un numero negativo;
- g: Cosa fai stasera?

2) Si considerino le seguenti proposizioni:

- a: La capitale d'Italia è Roma;
- b: 7 è un divisore di 14;
- c: 7 è un divisore di 21;
- d: Michelangelo ha scritto la Divina Commedia;
- e: 4 è un numero pari.

Eeguire le congiunzioni $a \wedge b$, $c \wedge d$, $d \wedge e$, $a \wedge e$, e stabilire il valore di verità delle proposizioni ottenute.

3) Si considerino le seguenti proposizioni:

- a: La capitale d'Italia è Parigi;
- b: 8 è un multiplo di 4;
- c: 8 è un multiplo di 2;
- d: Michelangelo ha scritto la Divina Commedia;

Eeguire le disgiunzioni $a \vee b$, $b \vee c$, $b \vee d$, $a \vee d$, e stabilire il valore di verità delle proposizioni ottenute.

4) Date le proposizioni:

- p: è un giorno di estate;
- q: c'è il sole;

scrivere il contenuto delle seguenti proposizioni:

$\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \wedge (\neg q)$, $(\neg p) \wedge (\neg q)$, $\neg(\neg q)$.

5) Scrivere in simboli i seguenti enunciati composti:

- a: non è vero che Piero non gioca a carte ogni sera; (con g = Piero gioca a carte ogni sera)
- b: non è vero che il gatto è vivo o è morto; (con v = il gatto è vivo e m = il gatto è morto)
- c: la luce non è spenta ed è verde; (con s = la luce è spenta e v = la luce è verde)
- d: piove o c'è il sole; (con p = piove e s = c'è il sole)
- e: 2 è un numero primo e non è dispari; (con p = 2 è un numero primo e d = 2 è un numero dispari)
- f: Mario e Lucia guardano le stelle. (con m = Mario guarda le stelle e l = Lucia guarda le stelle)

6) Dati gli enunciati:

- p: 20 è multiplo di 5;
- q: 17 è divisibile per 7;
- r: Bari è in Puglia;

eguire le implicazioni $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$, $p \rightarrow r$, $r \rightarrow q$, $q \rightarrow (\neg p)$, e stabilirne il valore di verità.

7) Dati gli enunciati:

- p: 20 è multiplo di 5;
- q: Bari è in Puglia;
- r: 17 è divisibile per 7;

eguire le operazioni logiche $p \rightarrow (\neg q)$, $(\neg q) \rightarrow r$, $(p \wedge q) \rightarrow r$, $((\neg p) \vee q) \leftrightarrow r$, e stabilirne il valore di verità.

Predicati

(enunciati aperti)

1) Dato il predicato: $p(x): 6 - 3x = 0, x \in \mathbb{Q}$,

stabilire il valore di verità degli enunciati $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$.

2) Dato il predicato: $q(x): 7x + 2 < 0, x \in \mathbb{Q}$,

stabilire il valore di verità degli enunciati $q(1)$, $q(3/7)$, $q(-4/7)$.

3) Determinare il valore di verità delle proposizioni seguenti:

a) $\exists x: x + 3 = 0, x \in \mathbb{N}$

b) $\exists x: x^2 = 25, x \in \mathbb{Z}$

c) $\exists x: x + 5 > 0, x \in \mathbb{N}$

d) $\forall x, 2 - x = 0, x \in \mathbb{N}$

e) $\forall x, 3 + x^2 > 0, x \in \mathbb{Q}$

4) Determinare l'insieme di verità del predicato $q(x) \wedge r(x)$, con:

$q(x): x < 7, x \in \mathbb{N}$

$r(x): x$ è un numero pari

5) Esprimere l'affermazione "Se un numero è divisibile per 9 allora è divisibile per 3" mediante l'implicazione logica tra due opportuni predicati.

6) Si considerino i predicati:

$a(x): x$ è un triangolo isoscele

$b(x): x$ è un triangolo che ha due angoli uguali

$a(x)$ e $b(x)$ sono equivalenti?

7) Scrivere nel linguaggio comune la proposizione: $\forall x, p(x) \rightarrow q(x)$ con $p(x): x$ è multiplo di 10, e $q(x): x$ è multiplo di 5.

RISPOSTE

Proposizioni

ESERCIZIO 1

a, c, d, g NON sono proposizioni perché non è possibile stabilirne il valore di verità.

b, e, f sono proposizioni:

b: Falsa

e: Vera

f: Vera

ESERCIZIO 2

$a \wedge b$:

La capitale d'Italia è Roma e 7 è un divisore di 14. $V \wedge V =$ Vera

$c \wedge d$:

7 è un divisore di 21 e Michelangelo ha scritto la Divina Commedia. $V \wedge F =$ Falsa

$d \wedge e$:

Michelangelo ha scritto la Divina Commedia e 4 è un numero pari. $F \wedge V =$ Falsa

$a \wedge e$:

La capitale d'Italia è Roma e 4 è un numero pari. $V \wedge V =$ Vera

ESERCIZIO 3

$a \vee b$:

La capitale d'Italia è Parigi oppure 8 è un multiplo di 4. $F \vee V =$ Vera

$b \vee c$:

8 è un multiplo di 4 oppure 8 è un multiplo di 2. $V \vee V =$ Vera

$b \vee d$:

8 è un multiplo di 4, o Michelangelo ha scritto la Divina Commedia. $V \vee F = V$

$a \vee d$:

La capitale d'Italia è Parigi oppure Michelangelo ha scritto la Divina Commedia. $F \vee F =$ Falso

ESERCIZIO 4

$\neg p$: non è un giorno di estate.

$p \wedge q$: è un giorno di estate e c'è il sole.

$p \vee q$: o è un giorno di estate, oppure c'è il sole.

$p \wedge (\neg q)$: è un giorno di estate e non c'è il sole.

$(\neg p) \wedge (\neg q)$: non è un giorno di estate e non c'è il sole.

$\neg(\neg q)$: non è che non c'è il sole = c'è il sole.

ESERCIZIO 5

a: $\neg(\neg g)$

con g = Piero gioca a carte ogni sera.

b: $\neg(v \vee m)$

con v = il gatto è vivo e m = il gatto è morto.

c: $(\neg s) \wedge v$

con s = la luce è spenta e v = la luce è verde.

d: $p \vee s$

con p = piove e s = c'è il sole.

e: $p \wedge (\neg d)$

con p = 2 è un numero primo e d = 2 è un numero dispari.

f: $m \wedge l$

con m = Mario guarda le stelle e l = Lucia guarda le stelle.

ESERCIZIO 6

$p \rightarrow q$: Se 20 è multiplo di 5, allora 17 è divisibile per 7. $V \rightarrow F$ = Falsa

$q \rightarrow r$: Se 17 è divisibile per 7, allora Bari è in Puglia. $F \rightarrow V$ = Vera

$p \rightarrow r$: Se 20 è multiplo di 5, allora Bari è in Puglia. $V \rightarrow V$ = Vera

$r \rightarrow q$: Se Bari è in Puglia, allora 17 è divisibile per 7. $V \rightarrow F$ = Falsa

$q \rightarrow (\neg p)$: Se 17 è divisibile per 7, allora 20 non è multiplo di 5. $F \rightarrow F$ = Vera

ESERCIZIO 7

$p \rightarrow (\neg q)$: $V \rightarrow (\neg V) = V \rightarrow F$ = Falsa

$(\neg q) \rightarrow r$: $(\neg V) \rightarrow F = F \rightarrow F$ = Vera

$(p \wedge q) \rightarrow r$: $(V \wedge V) \rightarrow F = V \rightarrow F$ = Falsa

$((\neg p) \vee q) \leftrightarrow r$: $((\neg V) \vee V) \leftrightarrow F = (F \vee V) \leftrightarrow F = V \leftrightarrow F$ = Falsa

Predicati

ESERCIZIO 1

$p(1)$:

$$6 - 3 \cdot 1 = 0$$

$$6 - 3 = 0$$

$$3 = 0 \rightarrow \text{Falso}$$

$p(2)$:

$$6 - 3 \cdot 2 = 0$$

$$6 - 6 = 0$$

$$0 = 0 \rightarrow \text{Vero}$$

$p(3)$:

$$6 - 3 \cdot 3 = 0$$

$$6 - 9 = 0$$

$$-3 = 0 \rightarrow \text{Falso}$$

ESERCIZIO 2

q(1):
 $7 \cdot 1 + 2 < 0$
 $7 + 2 < 0$
 $9 < 0 \rightarrow$ Falso q(3/7):
 $7 \cdot \frac{3}{7} + 2 < 0$
 $3 + 2 < 0$
 $5 < 0 \rightarrow$ Falso p(-4/7):
 $7 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) + 2 < 0$
 $-4 + 2 < 0$
 $-2 < 0 \rightarrow$ Vero

ESERCIZIO 3

- a) Non esiste nessun numero naturale che sommato a 3 dia 0: FALSA
- b) Per esempio $(+5)^2 = 25$, e +5 è un numero intero (insieme Z). VERA
- c) Per esempio $3 + 5 > 0$, e 3 è un numero naturale. VERA
- d) Per esempio per $x=3$ (che è naturale) ottengo $-1=0$ che non è vera. FALSA
- e) x^2 è un quadrato, quindi sempre positivo o al massimo uguale a zero, quindi se ci aggiungo 3 a maggior ragione $3 + x^2$ sarà sempre positivo. VERA

ESERCIZIO 4

x deve essere contemporaneamente un numero naturale minore di 7, e pari. L'insieme di verità S sarà quindi il risultato dell'intersezione tra l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei numeri naturali minori di 7.

$$S = \{2; 4; 6\}$$

ESERCIZIO 5

$$x/9 = n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x/3 = t, t \in \mathbb{N}$$

Ovvero $p(x) \Rightarrow q(x)$, con:

$p(x)$: x è divisibile per 9

$q(x)$: x è divisibile per 3.

ESERCIZIO 6

Si perché $a(x) \Leftrightarrow b(x)$, ovvero $a(x)$ coimplica $b(x)$.

$a(x)$ è condizione necessaria e sufficiente per $b(x)$.

$b(x)$ è condizione necessaria e sufficiente per $a(x)$.

ESERCIZIO 7

Ogni numero che è multiplo di 10 è anche multiplo di 5.