RCS Education

B.I.T. bravi in tutto

Giacomo Pagina
Giovanna Patri

risolto! 1

Percorsi di matematica
per il ripasso e il recupero

per la Scuola secondaria di secondo grado

UNITÀ CAMPIONE

Edizioni del Quadrifoglio

Unità **2**

Logica delle proposizioni

La logica è un linguaggio universalmente accettato che modella ragionamenti in simboli e in insiemi elementari.

Unità 2

2.1 Proposizioni e valori di verità

Prof

Nella **logica** un ragionamento è composto da frasi, chiamate **proposizioni**. A ogni proposizione è associato un **valore di verità**, che significa potere affermare se la proposizione è **vera** o **falsa**. In altri termini, una qualsiasi *frase* del linguaggio comune diventa **proposizione**, e dunque accettata dalla logica, se è possibile dichiarare che *la frase è vera* oppure *la frase è falsa*. Una proposizione non può essere mai contemporaneamente vera o falsa.

Esempi

- La frase

  Il Tevere è un monte.

  è una proposizione perché si può affermare con certezza un valore di verità (ovviamente falso).
- La frase

  Marco è un alunno simpatico.

  non è una proposizione logica: infatti non si può stabilire se la frase è una proposizione vera o falsa. Simpatia e antipatia implicano affermazioni soggettive, pertanto non ammesse nella logica delle proposizioni.

Una generica proposizione si rappresenta nelle seguenti tre possibili forme.

- **Forma scritta:** la proposizione è scritta in forma estesa;
- **Forma scritta con lettera:** la proposizione è scritta in forma estesa preceduta da una lettera minuscola e due punti;
- **Forma simbolica:** la proposizione è indicata solo con la lettera minuscola associata alla forma scritta.

Esempio

La frase "Londra è la capitale dell'Inghilterra" è una proposizione perché si può attribuire alla frase il valore di verità vero. La logica proposizionale rappresenta tale proposizione in:

- forma scritta

  Londra è la capitale dell'Inghilterra.

- forma scritta con lettera

  a: ***Londra è la capitale dell'Inghilterra.***

- forma simbolica

  a

Il **valore di verità vero** si indica con il termine **vero** o con la lettera maiuscola **V**.
Il **valore di verità falso** si indica con il termine **falso** o con la lettera maiuscola **F**.

Esempi

- La proposizione

  La rosa è un fiore.

  ha valore di verità **vero** (o **V**).
- La proposizione

  Il gatto ha le pinne.

  ha valore di verità **falso** (o **F**).

Esercizi 2.1

1. Indica quali tra le seguenti frasi sono proposizioni logiche.

a Il Po è il fiume più lungo di Italia.
b La bicicletta ha quattro ruote.
c Il Po è un fiume lungo.
d Domani forse pioverà.
e Gli alunni della tua classe sono alti.
f Tutti gli alunni della tua classe sono alti più di 165 cm.
g Il numero -5 è maggiore del numero 0.
h Il numero 13 è dispari.

Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni logiche.

2. *La Francia è una nazione europea.* V F

3. *Il numero* 3 *è un numero primo.* V F

4. 9 *è divisibile per* 5. V F

5. *I triangoli hanno quattro lati.* V F

6. *La somma degli angoli interni di un triangolo è* $180°$. V F

7. *La balena è un pesce.* V F

8. $3 + 5 = 8$. V F

2.2 Proposizioni composte e tabelle di verità

Prof

Una **proposizione composta** contiene due o più proposizioni, chiamate *proposizioni componenti* o *semplici*, che sono fra loro in relazione tramite *connettivi logici*.

I **connettivi logici** sono parole e frasi adottate nel linguaggio comune per esprimere un ragionamento, come

non*, *e*, *o*, *allora*, *quindi*, *se e solo se

e permettono di combinare proposizioni semplici per ottenere proposizioni composte.
Attenzione: come vedremo nei prossimi paragrafi, affinché la logica delle proposizioni sia efficace e pratica, a ogni connettivo logico è associato un simbolo matematico.

Esempio

La frase

Torino è capoluogo di regione e Berna è una capitale europea.

è una proposizione composta dalla proposizione componente

Torino è capoluogo di regione

e dalla proposizione componente

Berna è una capitale europea

La congiunzione

e

è il connettivo logico che relaziona le due proposizioni componenti.

Esempio

Nelle seguenti proposizioni sono sottolineati i connettivi logici presenti.

non* *è il fiume Po quello più lungo d'Europa

Torino è in Piemonte e Milano è in Friuli

due rette parallele sono anche equidistanti

Il valore di verità di una proposizione composta dipende dai valori di verità delle proposizioni componenti e dal tipo di connettivo logico.
La **tabella (o tavola) di verità** contiene tutti i possibili valori di verità che può assumere una proposizione composta, a seconda di tutte le possibili combinazioni dei valori di verità associati alle proposizioni componenti.

Analizziamo ora come è costruita una tabella di verità.
Consideriamo la proposizione composta

$$p * q$$

dove p e q sono le proposizioni componenti e $*$ è il simbolo di un generico connettivo logico (per il momento non ci interessa sapere quale).

La tabella di verità presenta tre colonne: nelle prime due sono elencate tutte le possibili combinazioni dei valori di verità di p e q, nella terza sono elencati i valori di verità che assume la proposizione composta $p * q$, in funzione dei valori di verità di p e q e del tipo di connettivo logico.

Per esempio, la terza riga stabilisce che se la proposizione p è falsa (F) e la proposizione q è vera (V), la proposizione composta $p * q$ è vera (V).

p	q	$p * q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Esercizi 2.2

9. Date le proposizioni componenti p: *Maria disegna* e q: *Maria guarda la televisione*, costruisci le proposizioni composte che ottieni utilizzando i connettivi logici *e* e *o*.

10. Data la proposizione p: *tutti gli studenti hanno preso la sufficienza*, costruisci la proposizione che ottieni utilizzando il connettivo logico *non*.

Nelle seguenti proposizioni composte, individua il connettivo logico e le proposizioni semplici che le compongono.

Trainer

11. *Luca legge e scrive.*

La proposizione composta è formata dalla proposizione semplice .... e dalla proposizione semplice .... collegate dal connettivo logico ....

12. *Paolo non porta gli occhiali.*

13. *Se sarò promosso, allora potrò comprarmi il computer nuovo.*

14. *Il numero* 3 *è divisore di* 18 *o di* 20.

15. *O mangi la pizza o mangi l'hamburger.*

2.3 Operazioni logiche

Prof

Un'operazione logica è l'azione di un connettivo logico che coinvolge una o più proposizioni. Il simbolo del connettivo logico identifica il tipo di operazione logica (come, per esempio, il simbolo + identifica l'addizione tra due numeri); inoltre, ogni operazione logica è completamente descritta da una tabella di verità.

Le operazioni logiche di *congiunzione*, di *disgiunzione*, di *disgiunzione esclusiva*, di *implicazione* e di *equivalenza* coinvolgono due proposizioni. L'operazione logica di *negazione* coinvolge una sola proposizione.

- Siano p e q due proposizioni qualsiasi. L'operazione logica di **congiunzione** si ottiene ponendo il connettivo logico ***e*** tra le due proposizioni in forma scritta. La forma simbolica della proposizione composta creata dalla congiunzione è

$$\boxed{p \wedge q}$$

e si legge ***p* congiunto *q***.
La proposizione composta di congiunzione è definita in modo da risultare **vera quando le proposizioni componenti sono entrambe vere**. Da questa definizione si costruisce la seguente tabella di verità.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esempio

Date le proposizioni

a*: *Franco prende l'automobile

b*: *Franco va al cinema

la proposizione composta ***a* congiunto *b*** è

$a \wedge b$*: *Franco prende l'automobile e va al cinema

Dalla tabella di verità della congiunzione, $a \wedge b$ è vera se Franco compie entrambe le azioni, è falsa se Franco non compie almeno una delle due azioni.

- Siano p e q due proposizioni qualsiasi. L'operazione logica di **disgiunzione** si ottiene ponendo il connettivo logico ***o*** tra le due proposizioni in forma scritta. La forma simbolica della proposizione composta creata dalla disgiunzione è

$$p \vee q$$

e si legge ***p* disgiunto *q***.
La proposizione composta di disgiunzione è definita in modo da risultare **vera quando almeno una delle proposizioni componenti è vera**. Da questa definizione si costruisce la seguente tabella di verità.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio

Date le proposizioni

r*: *Luigi indossa il cappotto

s*: *Luigi indossa il maglione

la proposizione composta ***r* disgiunto *s*** è

$r \vee s$: *Luigi indossa il cappotto o il maglione*

Dalla tabella di verità della disgiunzione, $r \vee s$ è vera se Luigi indossa almeno uno dei due abbigliamenti, è falsa se Luigi non indossa nessuno dei due.

- Siano p e q due proposizioni qualsiasi. L'operazione logica di **disgiunzione esclusiva** si ottiene ponendo il connettivo logico **o** davanti a ciascuna proposizione in forma scritta. La forma simbolica della proposizione composta creata dalla disgiunzione esclusiva è

$$p \dot{\vee} q$$

e si legge **o *p* o *q***.
La proposizione composta di disgiunzione esclusiva è definita in modo da risultare **vera quando le due proposizioni componenti hanno valore di verità diverso**. Da questa definizione si costruisce la seguente tabella di verità.

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio

Date le proposizioni

a*: *Mario va a Milano in treno

b*: *Mario va a Milano in auto

la proposizione composta **o *a* o *b*** è

a* $\dot{\vee}$ *b*: *Mario va a Milano o in treno o in auto

Dalla tabella di verità della disgiunzione esclusiva, $a \dot{\vee} b$ è vera se Mario va a Milano con uno solo dei due mezzi, è falsa se Mario va a Milano con entrambi i mezzi o non ci va con quei mezzi.

- Siano p e q due proposizioni qualsiasi. L'operazione logica di **implicazione** si ottiene ponendo il connettivo logico ***se*** davanti alla prima proposizione e il connettivo logico ***allora*** tra le due proposizioni. La forma simbolica della proposizione composta creata dall'implicazione è

$$\boxed{p \rightarrow q}$$

e si legge **se *p* allora *q***. La proposizione p dell'implicazione è detta **premessa**, mentre la proposizione q è detta **conseguenza**.
La proposizione composta di implicazione è definita in modo da risultare **falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa**. Da questa definizione si costruisce la seguente tabella di verità.

p	*q*	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esempio

Date le proposizioni

p*: *a e b sono due rette parallele

q*: *le rette a e b sono complanari

la proposizione composta **se *p* allora *q*** è

$p \rightarrow q$*: *se a e b sono due rette parallele allora sono complanari

Dalla tabella di verità dell'implicazione, $p \rightarrow q$ è falsa se due rette parallele (p vera) non sono complanari (q falsa). La $p \rightarrow q$ è vera se, per esempio, due rette non parallele (premessa p falsa) sono complanari (conseguenza q vera).

- Siano p e q due proposizioni qualsiasi. L'operazione logica di **equivalenza** si ottiene ponendo il connettivo logico ***se e solo se*** tra le due proposizioni in forma scritta.

La forma simbolica della proposizione composta creata dall'equivalenza è

$$\boxed{p \leftrightarrow q}$$

e si legge ***p* se e solo se *q***.
La proposizione composta di equivalenza è definita in modo da risultare **vera quando le proposizioni componenti hanno lo stesso valore di verità**. Da questa definizione si costruisce la seguente tabella di verità.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esempio

Date le proposizioni

p*: *Alessio va al cinema

q*: *Barbara va al cinema

la proposizione composta ***p* se e solo se *q*** è

p* ↔ *q*: *Alessio va al cinema <u>se e solo se</u> Barbara va al cinema

Dalla tabella di verità dell'equivalenza, $p \leftrightarrow q$ è vera se, per esempio, Alessio e Barbara non vanno al cinema (p e q false). La $p \leftrightarrow q$ è falsa se, per esempio, Alessio va al cinema (p vera) e Barbara non ci va (q falsa).

Concludiamo con l'operazione logica a singola proposizione. L'operazione logica di **negazione** si ottiene ponendo il connettivo logico ***non*** davanti alla proposizione in forma scritta. La forma simbolica della proposizione negata è

$$\boxed{\overline{p}}$$

e si legge **non *p***, oppure **non è vero che *p***.
La proposizione composta di negazione è definita in modo da **invertire il valore di verità della proposizione di partenza**. Da questa definizione si costruisce la tabella di verità a fianco.

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Esempio

Data la proposizione

p*: *Gennaio è l'ultimo mese dell'anno

la negazione di p è

$\overline{p}$: *Gennaio <u>non</u> è l'ultimo mese dell'anno*

Dalla tabella di verità, essendo p falsa, $\overline{p}$ risulta vera.

Esercizi 2.3

Trainer

16. Date le proposizioni p: *12 è multiplo di 3* e q: *12 è multiplo di 5*, determina il valore di verità della proposizione composta $p \wedge q$.

Analizza dapprima il valore di verità delle proposizioni componenti p e q: la proposizione p è .... e la q è ....
La proposizione composta p congiunto q è $p \wedge q$: *12 è multiplo di 3 e di 5* e risulta .... in quanto una delle proposizioni composte è ....

17. Date le proposizioni p e q, scrivi la proposizione composta $p \wedge q$ e determinane il valore di verità.

a. p: *il rettangolo ha quattro lati*, q: *il rombo ha quattro lati*
b. p: *Roma è la capitale della Francia*, q: *Atene è la capitale della Grecia*
c. p: *10 è un numero pari*, q: *10 è divisibile per 3*
d. p: $10 - 4 = 7$, q: $3 + 6 = 10$

18. Date le proposizioni a: *Milano è in Lombardia*, b: *il Po è un fiume*, c: *il Tevere è un monte*, determina il valore di verità delle seguenti proposizioni composte.

a. $a \wedge b$ **b.** $a \wedge c$ **c.** $b \wedge c$ **d.** $c \wedge b$

Trainer

19. Date le proposizioni p: *30 è un quadrato perfetto* e q: *mare è una parola di quattro lettere*, determina il valore di verità della proposizione composta $p \vee q$.

Analizza dapprima il valore di verità delle proposizioni semplici p e q: la proposizione p è .... e la q è ....
La proposizione composta p disgiunto q è $p \vee q$: *30 è un quadrato perfetto o mare è una parola di quattro lettere* e risulta .... in quanto una delle proposizioni composte è ....

20. Date le seguenti proposizioni p e q, scrivi la proposizione composta $p \vee q$ e determinane il valore di verità.

a. p: *28 è multiplo di 7*, q: *15 è multiplo di 5*
b. p: *l'angolo acuto è maggiore di 90°*, q: *l'angolo retto è di 90°*
c. p: *il Tevere è un fiume*, q: *l'Etna è un fiume*
d. p: $5 < 2$, q: $-10 > 0$

21. Date le proposizioni a: *la volpe è un mammifero*, b: *il coccodrillo è un rettile*, c: *la mosca è un uccello*, determina il valore di verità delle seguenti proposizioni composte.

a. $a \vee b$ **b.** $a \vee c$ **c.** $b \vee c$ **d.** $c \vee b$

22. Indica il valore di verità della proposizione $a \vee b$, supponendo a vera e b falsa.

Trainer

23. Date le proposizioni p: $5 - 3 \neq 8$ e q: $12 + 3 = 16$, determina il valore di verità della proposizione composta $p \dot{\vee} q$.

Analizza dapprima il valore di verità delle proposizioni semplici p e q: la proposizione p è .... e la q è .... La proposizione composta o p o q è $p \dot{\vee} q$: *o* $5 - 3 \neq 8$ *o* $12 + 3 = 16$ e risulta .... in quanto le due proposizioni composte hanno valore di verità ....

24. Date le seguenti proposizioni p e q, scrivi la proposizione composta $p \dot{\vee} q$ e determinane il valore di verità.

a. p: *il Sole è una stella*, q: *la Terra è un pianeta*
b. p: 2 *è divisore di* 15, q: 3 *è divisore di* 18
c. p: *il m.c.m. tra* 2 *e* 3 *è* 6, q: *il M.C.D. tra* 6 *e* 9 *è* 2
d. p: *Ginevra è in Austria*, q: *Lugano è in Francia*

25. Date le proposizioni
a: *la somma degli angoli interni di un triangolo è* $180°$,
b: *gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti*,
c: *gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono ottusi*,
determina il valore di verità delle seguenti proposizioni composte

a. $a \dot{\vee} b$ **b.** $a \dot{\vee} c$ **c.** $b \dot{\vee} c$ **d.** $c \dot{\vee} b$

Trainer

26. Date le proposizioni p: *la rosa è un fiore* e q: *un rettangolo ha tre lati*, determina il valore di verità della proposizione composta $p \rightarrow q$.

Analizza dapprima il valore di verità delle proposizioni componenti p e q: la proposizione p è .... e la q è .... La proposizione composta se p allora q è $p \rightarrow q$: *se la rosa è un fiore, allora un rettangolo ha tre lati* e risulta .... in quanto la premessa p è ...., mentre la conseguenza q è ....

27. Date le seguenti proposizioni p e q, scrivi la proposizione composta $p \rightarrow q$ e determinane il valore di verità:

a. p: *un gatto è un felino*, q: *la mucca è un mammifero*

b. p: 12 *è pari*, q: 4 *è divisore di* 22

c. p: 10 *è divisibile per* 3, q: *il rombo è un parallelogramma*

d. p: *Napoli è la capitale della Russia*, q: 13 *è pari*

28. Date le proposizioni a: $7 + 6 = 13$, b: $7 - 2 = 5$, c: $7 : 5 = 2$, determina il valore di verità delle seguenti proposizioni composte

a. $a \rightarrow b$ **b.** $a \rightarrow c$ **c.** $b \rightarrow c$ **d.** $c \rightarrow b$

Trainer

29. Date le proposizioni p: 12 *è un numero primo* e q: 9 *è multiplo di* 5, determina il valore di verità della proposizione composta $p \leftrightarrow q$.

Analizza dapprima il valore di verità delle proposizioni semplici p e q: la proposizione p è .... e la q è .... La proposizione composta p se e solo se q è $p \leftrightarrow q$: 12 *è un numero primo se e solo se* 9 *è multiplo di* 5 e risulta .... in quanto sia p che q sono ....

30. Date le seguenti proposizioni p e q, scrivi la proposizione composta $p \leftrightarrow q$ e determinane il valore di verità:

a. p: *la rosa è un fiore*, q: *Parigi è la capitale della Francia*

b. p: *il quadrato è un parallelogramma*, q: *Leopardi era un musicista*

c. p: *il trapezio è un parallelogramma*, q: *la Sicilia è un'isola*

d. p: *il Po scorre in Russia*, q: *il Tevere scorre in Germania*

31. Date le proposizioni
a: 3 *è un numero dispari*,
b: 10 *è multiplo di* 2,
c: 15 *è multiplo di* 2,
determina il valore di verità delle seguenti proposizioni composte

a. $a \leftrightarrow b$ **b.** $a \leftrightarrow c$ **c.** $b \leftrightarrow c$ **d.** $c \leftrightarrow b$

Trainer

32. Data la proposizione p: *tutti i numeri primi sono dispari*, determina il valore di verità della proposizione $\overline{p}$.

La proposizione p è .... La proposizione non p è $\overline{p}$: *non è vero che tutti i numeri primi sono dispari* e risulta ....

33. Date le seguenti proposizioni p, scrivi la proposizione $\overline{p}$ e determinane il valore di verità:

a. p: *Roma è la capitale d'Italia*
b. p: *tutti i numeri pari sono divisibili per due*
c. p: $3 + 2 = 6$
d. p: $2 > 0$

34. Indica il valore di verità della proposizione $\overline{a}$, supponendo a falsa.

35. Indica il valore di verità della proposizione $\overline{\overline{a}}$, supponendo a falsa.

2.4 Espressioni logiche

Prof

L'espressione logica comprende più proposizioni semplici correlate da connettivi logici.
Risolvere un'espressione logica significa costruire la relativa tavola di verità, considerando tutti i possibili valori di verità delle proposizioni semplici e le tavole di verità delle operazioni logiche indicate dai connettivi.

L'espressione logica può contenere parentesi per modificare l'ordine di calcolo dei connettivi, come accade per le espressioni algebriche. Quindi, nello svolgimento di un'espressione logica, si svolgono prima i connettivi interni alle parentesi tonde, poi a quelle quadre e infine a quelle graffe.

Esempio

Costruiamo la tavola di verità dell'espressione logica

$$\overline{s} \wedge (s \vee t)$$

Partiamo dall'elencare tutte le possibili combinazioni dei valori di verità che possono assumere le proposizioni semplici s e t.

s	t
V	V
V	F
F	V
F	F

A destra della tabella aggiungiamo una colonna per ciascuna operazione logica dell'espressione, rispettando la gerarchia delle parentesi.

La prima operazione logica è quella di negazione sulla proposizione semplice s: otteniamo la colonna evidenziata con i valori di verità secondo la tavola di verità della negazione.

s	t	$\bar{s}$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La seconda operazione logica è quella di disgiunzione in parentesi tonda tra le proposizioni semplici s e t.

s	t	$\bar{s}$	$s \vee t$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

La terza e ultima operazione logica è quella di congiunzione tra la negazione s e il risultato della disgiunzione tra s e t.

s	t	$\bar{s}$	$s \vee t$	$\bar{s} \wedge (s \vee t)$
V	V	F	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Due espressioni logiche diverse sono definite **equivalenti** quando hanno la stessa tavola di verità. L'equivalenza fra espressioni logiche è rappresentata dal simbolo =.

Esempio

L'espressione logica a è equivalente all'espressione logica $(a \wedge b) \vee a$. Infatti, costruendo la tavola di verità di quest'ultima espressione, osserviamo che la prima colonna ha i medesimi valori di verità della terza. Possiamo scrivere:

$$a = (a \wedge b) \vee a$$

a	b	$(a \wedge b) \vee a$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Una proposizione composta è definita **tautologia** quando è sempre vera, qualunque siano i valori di verità delle relative proposizioni componenti.

Esempio

La proposizione composta

$$a \vee \bar{a}$$

è una tautologia. Infatti, eseguendo l'operazione logica di negazione su a e poi quella di disgiunzione tra a e $\bar{a}$, si ottiene la tavola di verità che mostra sempre valore di verità vero.

a	$\bar{a}$	$a \vee \bar{a}$
V	F	V
F	V	V

Una proposizione composta è definita **contraddizione** quando è sempre falsa, qualunque siano i valori di verità delle proposizioni componenti.

Esempio

La proposizione composta

$$a \wedge \bar{a}$$

è una contraddizione. Infatti, eseguendo l'operazione logica di negazione su a e poi quella di congiunzione tra a e $\bar{a}$, si ottiene la tavola di verità che mostra sempre valore di verità falso.

a	$\bar{a}$	$a \wedge \bar{a}$
V	F	F
F	V	F

Esercizi 2.4

Trainer

36. Date le proposizioni p: 15 *è multiplo di* 3, q: 15 *è multiplo di* 4 e r: *ogni numero divisibile per* 5 *termina con* 0, determina il valore di verità dell'espressione $p \wedge (q \vee r)$.

Analizza dapprima il valore di verità delle proposizioni semplici p, q e r: la proposizione p è ...., la q è .... e la r è ....
L'uso delle parentesi è fondamentale come nell'algebra, quindi determina dapprima il valore di verità della proposizione composta nella parentesi tonda $q \vee r$: essa è ....
Infine, il valore di verità della proposizione p congiunto $q \vee r$ è ....

37. Date le proposizioni p, q e r come nell'esercizio precedente, determina il valore di verità delle seguenti espressioni logiche.

a. $p \wedge q \vee r$ V F
b. $p \wedge (q \wedge r)$ V F
c. $\bar{p} \vee (q \vee r)$ V F
d. $p \rightarrow (q \vee r)$ V F
e. $p \leftrightarrow (q \vee r)$ V F
f. $p \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})$ V F
g. $p \vee (\overline{q \vee r})$ V F

38. Calcola il valore di verità dell'espressione $(a \leftrightarrow b) \rightarrow (a \vee b)$, supponendo a falsa e b vera.

39. Calcola il valore di verità dell'espressione $(p \wedge q) \vee (\bar{q} \vee r)$, supponendo p vera, q falsa e r vera.

Trainer

40. Costruisci la tabella di verità dell'espressione $p \wedge (\overline{p} \vee q)$.

L'espressione è formata dalla congiunzione tra p e la proposizione di disgiunzione $\overline{p} \vee q$. Costruisci una tabella inserendo nelle prime due colonne p e q con tutte le possibili combinazioni di vero (V) e falso (F).

p	q
V	V
....	....
....	....
....	....

Aggiungi una terza colonna nella quale scrivi i valori di verità di $\overline{p}$ a partire da quelli di p riportati nella prima colonna.

p	q	$\overline{p}$
V	V	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

Aggiungi una quarta colonna nella quale scrivi i valori di verità di $\overline{p} \vee q$ ottenuti applicando l'operazione di disgiunzione tra la terza e la seconda colonna.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
V	V	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....

Infine, aggiungi una quinta colonna nella quale scrivi i valori di verità di $(\overline{p} \vee q) \wedge p$ ottenuti applicando l'operazione di congiunzione tra la quarta e la prima colonna.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$	$p \wedge (\overline{p} \vee q)$
V	V	....	....	....
....	....	....	....	....
....	....	....	....	....
....	....	....	....	....

41. Costruisci le tavole di verità delle seguenti espressioni logiche.

- **a.** $p \wedge (p \vee q)$
- **b.** $\overline{q} \wedge (p \vee q)$
- **c.** $p \to (\overline{q} \dot{\vee} p)$
- **d.** $q \wedge (q \to \overline{p})$
- **e.** $(p \vee q) \leftrightarrow \overline{p}$

Trainer

42. Dimostra che l'espressione $(p \wedge q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ è una contraddizione.

Costruisci la tabella di verità dell'espressione e verifica che, qualunque sia il valore di verità attribuito alle proposizioni componenti p e q, l'espressione risulta sempre falsa.

43. Dimostra che l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ è una contraddizione.

Trainer

44. Dimostra che l'espressione $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ è una tautologia.

Costruisci la tabella di verità dell'espressione e verifica che, qualunque sia il valore di verità attribuito alle proposizioni semplici p e q, l'espressione risulta sempre vera.

45. Dimostra che l'espressione $(\overline{p} \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \overline{p})$ è una tautologia.

Trainer

46. Verifica l'equivalenza logica $p \vee q = \overline{p} \rightarrow q$.

Costruisci la tabella di verità dell'espressione a primo membro e verifica che è identica a quella dell'espressione a secondo membro.

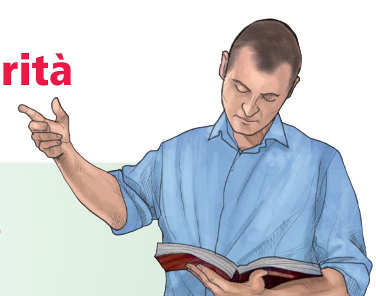
47. Verifica l'equivalenza logica delle seguenti espressioni:

a. $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ **b.** $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

48. Verifica l'equivalenza logica delle seguenti espressioni:

a. $p \vee (p \wedge q) = p$ **b.** $p \wedge (p \vee q) = p$

2.5 Proposizioni indeterminate e insiemi verità



Prof

Evidenziamo l'esistenza di relazioni tra le operazioni logiche e le operazioni tra insiemi.

Definiamo **soggetto** di una proposizione il personaggio o l'oggetto di cui nella proposizione si afferma una caratteristica o si esplicita un'azione.

Esempio

Nella seguenti proposizioni il termine sottolineato è il relativo soggetto.

il <u>quadrato</u> è un poligono regolare

il <u>campione del mondo</u> partecipa alla tappa

Definiamo **proposizione indeterminata** (o **predicato**), che indichiamo con $\boldsymbol{p(x)}$, una proposizione che non ha un soggetto dichiarato e, dunque, per essa non può essere definito un valore di verità. Nella proposizione indeterminata, il soggetto mancante è solitamente sostituito dalla lettera minuscola x.

Esempio

La proposizione

p*: *Parigi è una città francese

ha come soggetto Parigi.
La relativa proposizione indeterminata è

p(x)*: *x è una città francese

Sia $p(x)$ una proposizione indeterminata. Definiamo il suo **insieme verità**, indicato con X, come l'insieme contenente tutti i soggetti x che rendono vera la proposizione indeterminata.

Esempio

Sia data la proposizione indeterminata

***p(x)*: *x è divisore di* 12**

In questo caso il soggetto mancante è un numero. L'insieme verità X contiene tutti i numeri che sono divisori di 12; quindi, se lo rappresentiamo per elencazione, abbiamo

$$X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Le operazioni di congiunzione, disgiunzione e negazione si applicano anche alle proposizioni indeterminate.

Attenzione: poiché in questi casi è impossibile costruire la relativa tabella di verità, si considera solo il relativo insieme verità.

- Siano $p(x)$ e $q(x)$ due proposizioni indeterminate con insiemi di verità X e Y, rispettivamente. La loro congiunzione è

  $$p(x) \wedge q(x)$$

  L'insieme verità di $p(x) \wedge q(x)$ contiene i soggetti di X e di Y che rendono vera la congiunzione ed è l'*insieme intersezione* tra l'insieme verità X e l'insieme verità Y, cioè

  $$X \cap Y$$

Esempio

Siano date le proposizioni indeterminate

$$\boldsymbol{p(x)}\text{: } \boldsymbol{x} \textbf{ \textit{è divisore di} } \mathbf{12}$$

e

$$\boldsymbol{q(x)}\text{: } \boldsymbol{x} \textbf{ \textit{è divisore di} } \mathbf{20}$$

L'insieme verità X di $p(x)$ contiene tutti i divisori di 12, cioè

$$X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

L'insieme verità Y di $q(x)$ contiene tutti i divisori di 20, cioè

$$Y = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

La congiunzione tra $p(x)$ e $q(x)$ è la proposizione composta

$$\boldsymbol{p(x) \wedge q(x)}\text{: } \boldsymbol{x} \textbf{ \textit{è divisore di} } \mathbf{12} \textbf{ \textit{e di} } \mathbf{20}$$

e ha come insieme verità l'insieme intersezione tra X e Y, cioè

$$X \cap Y = \{1, 2, 4\}$$

i cui elementi sono i numeri che, sostituiti a x nella proposizione composta $p(x) \wedge q(x)$, la rendono vera.

► Siano $p(x)$ e $q(x)$ due proposizioni indeterminate con insiemi di verità X e Y, rispettivamente. La loro disgiunzione è

$$p(x) \vee q(x)$$

L'insieme verità di $p(x) \vee q(x)$ contiene i soggetti di $p(x)$ e $q(x)$ che rendono vera la disgiunzione ed è l'*insieme unione* tra l'insieme verità X e l'insieme verità Y, cioè

$$X \cup Y$$

Esempio

Siano date le proposizioni indeterminate dell'esempio precedente.
La disgiunzione tra $p(x)$ e $q(x)$ è la proposizione composta

$$\boldsymbol{p(x) \vee q(x)}\text{: } \boldsymbol{x} \textbf{ \textit{è divisore di} } \mathbf{12} \textbf{ \textit{o di} } \mathbf{20}$$

e ha come insieme verità l'insieme unione tra X e Y, cioè

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 20\}$$

i cui elementi sono i numeri che, sostituiti a x nella proposizione composta $p(x) \vee q(x)$, la rendono vera.

► Sia $p(x)$ una proposizione indeterminata con insieme di verità X. La sua negazione è

$$\overline{p(x)}$$

L'insieme verità di $\overline{p(x)}$ contiene i soggetti di $p(x)$ che rendono vera la negazione ed è l'insieme complementare dell'insieme verità X, cioè

$$\overline{X}$$

Esempio

Sia data la proposizione indeterminata

p (x): ***x è giorno della settimana che ha come iniziale "m"***

Essa ha come insieme di verità l'insieme X

$$X = \{\text{martedì, mercoledì}\}$$

La negazione di $p(x)$ è

$\overline{p(x)}$: ***x è giorno della settimana che non ha come iniziale "m"***

e ha come insieme verità l'insieme complementare di X

$$\overline{X} = \{\text{lunedì, giovedì, venerdì, sabato, domenica}\}$$

i cui elementi, se sostituiti a x nella proposizione $\overline{p(x)}$, la rendono vera.

Attenzione: non si devono confondere i connettivi logici con i simboli di operazione tra insiemi. I connettivi logici relazionano proposizioni, i simboli insiemistici coinvolgono gli insiemi verità delle proposizioni indeterminate.

Esercizi 2.5

Trainer

49. Dato il predicato $p(x)$: $x - 3 = 0$, $x \in \mathbb{Q}$, determina il suo insieme verità X.

Il predicato è l'equazione .... che ammette soluzione ....
L'insieme verità del predicato è quindi $X = \{........\}$.

50. Dati i seguenti predicati, determinane gli insiemi verità:

a. $p(x)$: $x^2 = 4$, $x \in \mathbb{Z}$
b. $p(x)$: *x è multiplo di* 3
c. $p(x)$: x è provincia della Lombardia
d. $p(x)$: $2 < x < 7$, $x \in \mathbb{N}$

51. Dato il predicato $a(x)$: $x > 2$, $x \in \mathbb{N}$, stabilisci il valore di verità delle proposizioni $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, ottenute sostituendo i valori 1, 2, 3 alla x.

52. Dati i predicati $p(x)$: *x è un triangolo e* $q(x)$: *x è un poligono con i lati uguali* determina gli insiemi verità del predicato $p(x) \wedge q(x)$.

53. Dati i predicati $p(x)$: *x è divisore di* 10 *e* $q(x)$: *x è multiplo di* 2 determina gli insiemi verità del predicato $p(x) \vee q(x)$.

54. Dato il predicato $p(x)$: $x > 5$, $x \in \mathbb{N}$, determina l'insieme verità del predicato $\overline{p(x)}$.

55. Dato il predicato $p(x)$: *x è dispari e* $q(x)$: *x è un quadrato perfetto* determina il valore di verità delle proposizioni $p(3) \wedge q(3)$, $p(5) \vee q(16)$, $\overline{p(7)} \rightarrow q(3)$.

Esercizi di riepilogo

56. Date le proposizioni semplici p: 15 *è un numero dispari* e q: 5 *è un divisore di* 18, indica il valore di verità delle proposizioni composte

a. $\overline{p}$ **b.** $\overline{p} \wedge q$ **c.** $\overline{p} \vee q$ **d.** $p \dot{\vee} q$ **e.** $p \rightarrow q$

57. Date le proposizioni p: *io leggo* e q: *io vado a giocare*, scrivi in forma simbolica le seguenti proposizioni composte

a. se leggo, allora non vado a giocare
b. o leggo o vado a giocare
c. leggo o vado a giocare
d. non è vero che vado a giocare
e. io non leggo e non vado a giocare

58. Determina il valore di verità delle proposizioni composte, con p vera

a. $p \vee \overline{p}$ **b.** $p \wedge \overline{p}$ **c.** $p \vee \overline{\overline{p}}$ **d.** $p \wedge \overline{\overline{p}}$

59. Date le proposizioni componenti p: 10 *è un numero dispari*, q: 2 *è divisore di* 12, r: 6 *è multiplo di* 2, s: 13 *è numero primo*, stabilisci il valore di verità delle proposizioni composte

a. $p \rightarrow q$ **b.** $q \rightarrow r$ **c.** $r \rightarrow s$ **d.** $p \leftrightarrow q$ **e.** $q \leftrightarrow r$

60. Se p è vera e q è falsa, determina i valori di verità di

a. $\overline{p}$ **b.** $\overline{p} \vee q$ **c.** $\overline{p} \wedge q$ **d.** $\overline{p} \rightarrow q$

61. Se p è falsa, q è vera e r è vera, determina i valori di verità di

a. $\overline{p}$ **b.** $\overline{r}$ **c.** $(\overline{p} \vee q) \vee r$ **d.** $\overline{p} \rightarrow (q \rightarrow \overline{r})$ **e.** $(\overline{p} \wedge q) \wedge r$

62. Costruisci la tavola di verità dell'espressione $(a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a \leftrightarrow b})$.

63. L'espressione $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})$ è una tautologia o una contraddizione?

64. L'espressione $p \wedge (\overline{q \rightarrow p})$ è una tautologia o una contraddizione?

65. Dimostra l'equivalenza logica $p \rightarrow q = \overline{p} \vee q$.

66. La proposizione $p \rightarrow q$ è equivalente a $q \rightarrow p$? E a $\overline{p} \rightarrow \overline{q}$?

67. Verifica l'equivalenza logica $p \wedge (p \wedge \overline{q}) = p \wedge (\overline{p \wedge q})$.

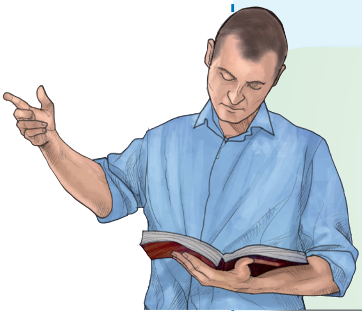
68. Dati i predicati $p(x)$: *x è multiplo di* 3 e $q(x)$: *x è multiplo di 4*, determina il valore di verità delle proposizioni composte

a. $p(6) \wedge q(12)$ **b.** $p(10) \vee q(15)$ **c.** $p(5) \dot{\vee} q(8)$ **d.** $p(10) \leftrightarrow q(15)$

69. Dati i predicati $p(x)$: *x è divisore di* 27 e $q(x)$: *x è divisore di* 24, determina l'insieme verità dei predicati

a. $p(x) \wedge q(x)$ **b.** $p(x) \vee q(x)$ **c.** $\overline{p(x)} \wedge q(x)$

Test di autovalutazione



Prof **Trainer**

Per valutare il tuo livello di preparazione sugli argomenti dell'Unità, risolvi i seguenti esercizi e confronta i risultati con quelli riportati a pagina 278. Se hai svolto correttamente almeno sei esercizi, la tua preparazione è sufficiente.

1. Quali delle seguenti frasi sono proposizioni logiche?

- **a** Il Monte Bianco è alto
- **b** Il Monte Bianco è alto 4 810 m
- **c** $6 : 2 = 4$
- **d** Vieni a trovarmi?
- **e** 18 è divisibile per 4
- **f** Luca è fortunato

2. Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni logiche.

a. *New York è una città degli Stati Uniti.* **b.** 16 *è multiplo di* 3.

3. Date le proposizioni p: *oggi piove* e q: *porto l'ombrello*, scrivi in forma simbolica le seguenti proposizioni composte.

a. *Se piove, allora porto l'ombrello.*
b. *Se non porto l'ombrello, allora non piove.*
c. *Non piove e non porto l'ombrello.*
d. *Porto l'ombrello se e solo se piove.*

4. Date le proposizioni p: *studio* e q: *vado alla festa*, scrivi le seguenti proposizioni composte

a. $p \dot{\vee} q$ **b.** $\overline{p} \rightarrow q$ **c.** $p \leftrightarrow \overline{q}$ **d.** $\overline{p \vee q}$

5. Date le proposizioni p: 6 *è multiplo di* 2 e q: 5 *è divisore di* 16, scrivi la loro disgiunzione e stabilisci se è vera o falsa.

6. Date le proposizioni p: *un triangolo isoscele ha tre lati uguali* e q: *il trapezio è un parallelogramma*, scrivi la loro congiunzione e stabilisci se è vera o falsa.

7. Se p è una proposizione vera e q una proposizione falsa, qual è il valore di verità delle proposizioni composte?

a. $p \wedge \overline{q}$ **b.** $\overline{p} \dot{\vee} \overline{q}$ **c.** $\overline{p} \rightarrow q$ **d.** $\overline{\overline{p}} \leftrightarrow \overline{q}$

8. L'espressione logica $(\overline{p \vee q}) \wedge p$ è una tautologia o una contraddizione?

9. Verifica l'equivalenza logica $\overline{p} \rightarrow \overline{q} = \overline{q} \rightarrow \overline{p}$.

10. Dati i predicati $p(x)$: x *è numero dispari* e $q(x)$: $2 < x < 10$, $x \in \mathbb{N}$, determina gli insiemi verità di $p(x) \wedge q(x)$ e di $p(x) \vee q(x)$.

Cerca il testo completo in libreria
oppure acquistalo su librериarizzoli.it

I contenuti di risolto! 1

Indice: